Funkcje

1 W sklepie internetowym za zakupy za kwotę powyżej 50 zł przyznaje się rabat w wysokości 10% nadwyżki ceny zakupów nad 50 zł. Korzystając z funkcji złożonej, znajdź wartość udzielonego rabatu, jeśli dokonano zakupów za kwotę wyższą niż 50 zł.

Rozwiązanie

2 Jeśli w poprzednim zadaniu rabat wynosiłby 4,75% na zakupy powyżej 35 zł, a rabat na konkretny zakup wyniósłby 1,90 zł, to jaka była wartość zakupu przed udzieleniem rabatu?

Rozwiązanie

3 Niewielka plama atramentu o powierzchni 1 cm^2 i promieniu $r(t)$ na kawałku papieru chłonnego rozchodzi się w czasie t sekund, tworząc okrąg, którego promień zwiększa się w czasie według wzoru:

$$r(t) = \frac{1+t^2}{2+t^2}.$$

Ile czasu zajmuje kleksowi pokrycie obszaru:

(a) 1,50 cm^2,
(b) 1,75 cm^2,
(c) 2,00 cm^2,
(d) 3,00 cm^2.

Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Niech y będzie kwotą, od której nalicza się 10% rabatu. Wynosi on zatem $f(y) = 0{,}1y$. Jeśli dokonano zakupów za kwotę $x > 50$, to nadwyżką nad 50 zł jest $g(x) = x - 50$. Od tej właśnie nadwyżki obliczany jest rabat $r(x)$:

$$r(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0{,}1g(x) = 0{,}1(x - 50).$$

Przykładowo dla zakupów za kwotę 60 zł rabat wyniesie $r(60) = 0{,}1(60 - 50) = 1$, czyli 1 zł.

Pytanie

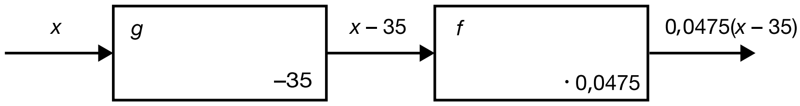
2 W tym przypadku rabat od kwoty y oraz nadwyżka nad kwotę $x > 35$ wynoszą odpowiednio

$$f(y) = 0{,}0475y \quad \text{i} \quad g(x) = x - 35.$$

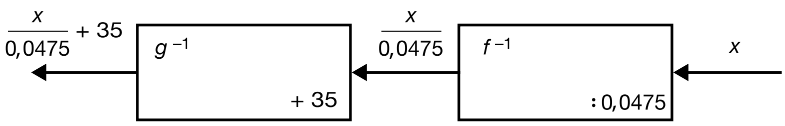
Zatem funkcją złożoną, za pomocą której możemy znaleźć wartość rabatu jest

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0{,}0475(x - 35).$$

Aby obliczyć wartość zakupu przed zniżką, znając kwotę rabatu, musimy użyć funkcji odwrotnej do funkcji złożonej. Funkcję złożoną można zaprezentować za pomocą następującego schematu blokowego:



Natomiast funkcję odwrotną do funkcji złożonej przedstawiamy na schemacie blokowym z odwróconym kierunkiem przepływu danych, na którym funkcje składowe zamieniamy na funkcje do nich odwrotne.



Zatem jeśli x oznacza udzieloną zniżkę, to wartość zakup przed rabatem wynosiła

$$g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{x}{0{,}0475} + 35.$$

Dla $x = 1{,}90$ mamy

$$g^{-1}(f^{-1}(1{,}90)) = \frac{1{,}90}{0{,}0475} + 35 = 40 + 35 = 75.$$

Pytanie

3 Promień dany jest jako:

$$r(t) = \frac{1+t^2}{2+t^2} = \frac{1+t^2}{1+t^2+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+t^2}}$$

Teraz, jeśli zdefiniujmy $a(x) = x^2$, $b(x) = x + 1$ i $c(x) = x^{-1}$, wówczas $r(t) = c \circ b \circ c \circ b \circ a(t)$, a zatem $r^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1} \circ c^{-1} \circ b^{-1} \circ c^{-1}(r)$, gdzie

$$a^{-1}(x) = \sqrt{x},\ b^{-1}(x) = x - 1 \text{ i } c^{-1}(x) = x^{-1}.$$

Zatem

$$t(r) = \sqrt{\left(\frac{1}{r} - 1\right)^{-1} - 1}.$$

Jeśli więc:

(a) $A = 1{,}50 = \pi r^2$, wówczas $r = 0{,}690\ldots$, dając

$$t(0{,}690\ldots) = \sqrt{\left(\frac{1}{r} - 1\right)^{-1} - 1} = 1{,}112 \text{ sekund do trzech miejsc po przecinku.}$$

(b) $A = 1{,}75 = \pi r^2$, wówczas $r = 0{,}746\ldots$, dając

$$t(0{,}746\ldots) = \sqrt{\left(\frac{1}{r} - 1\right)^{-1} - 1} = 1{,}394 \text{ sekund do trzech miejsc po przecinku.}$$

(c) $A = 2{,}00 = \pi r^2$, wówczas $r = 0{,}797\ldots$, dając

$$t(0{,}797\ldots) = \sqrt{\left(\frac{1}{r} - 1\right)^{-1} - 1} = 1{,}717 \text{ sekund do trzech miejsc po przecinku.}$$

(d) $A = 3{,}00 = \pi r^2$, wówczas $r = 0{,}977\ldots$, dając

$$t(0{,}977\ldots) = \sqrt{\left(\frac{1}{r} - 1\right)^{-1} - 1} = 6{,}471 \text{ sekund do trzech miejsc po przecinku.}$$

Pytanie