

# Trygonometria

---

- 1** Oscyloskop wykrywa dwa sygnały  
 $f(t) = 4 \cos \omega t$  oraz  $g(t) = 2 \sin \omega t$   
i wyświetla ich sumę. Przedstaw wzór powstałego przebiegu w postaci zawierającej jedynie cosinus.
- 
- 2** Wymiary przybudówki ze spadzistym dachem są określone przez standardowe rozmiary dostępnego drewna. Belki dachowe mają znormalizowaną długość - 3 m, a przepisy budowlane stanowią, że dach musi mieć kąt  $35^\circ$  względem poziomu.
- (a) Jaka jest szerokość przybudówki?  
(b) O ile wyżej znajduje się górny koniec belki dachowej w porównaniu z jej dolnym końcem?
- 
- 3** (a) Ile trójkątnych półfabrykatów o wymiarach  $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  można wyciąć z blachy stalowej o wymiarach  $2000 \text{ mm}$  na  $1000 \text{ mm}$  przy założeniu, że podczas cięcia nie ma strat materiałowych?  
(b) Jaka będzie odpowiedź w przypadku, kiedy przy każdym cięciu traci się  $1,25 \text{ mm}$  stali?
- 
- 4** Korzystając z arkusza kalkulacyjnego, narysuj wykresy następujących funkcji:  
(a)  $f(t) = 5e^{-0,3t} \cos 2t$  dla  $-5 \leq t \leq 15$ ,  
(b)  $f(t) = 5e^{0,3t} \cos 2t$  dla  $-5 \leq t \leq 15$ ,  
(c)  $f(t) = \cos t + \sin t$  dla  $-5 \leq t \leq 15$  z krokiem o wartości  $0,2$ ,  
(d)  $f(t) = \cos t + \sin \pi t$  dla  $-5 \leq t \leq 15$  z krokiem o wartości  $0,2$ .

Porównaj wykres (a) z wykresem (b) i opisz, co się dzieje w każdym przypadku.

Porównaj wykres (c) z wykresem (d) i opisz, co się dzieje w każdym przypadku.

---

## Odpowiedzi

---

**1**  $f(t) + g(t) = 29 \cos(\omega t - \alpha)$

---

- 2** (a) 4,9 metra  
(b) 1,72 metra
- 

- 3** (a) 3300  
(b) 3072
- 

- 4** Wykres (a) przedstawia funkcję okresową o malejącej amplitudzie, podczas gdy wykres (b) przedstawia funkcję okresową o rosnącej amplitudzie.

Wykres (c) przedstawia regularną funkcję okresową, podczas gdy wykres (d) przedstawia funkcję nieokresową. Po dodaniu dwóch funkcji okresowych utworzą one trzecią funkcję okresową tylko wtedy, gdy ich częstotliwości są współmierne (tzn. ich iloraz jest liczbą wymierną). Tymczasem częstotliwości obu składników są niewspółmierne.

---

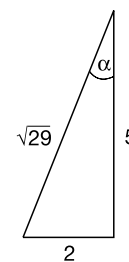
## Rozwiązania

---

1 
$$f(t) + g(t) = 5 \cos \omega t + 2 \sin \omega t$$
$$= \sqrt{29} \left( \frac{5}{\sqrt{29}} \cos \omega t + \frac{2}{\sqrt{29}} \sin \omega t \right),$$

spójrzmy na następujący trójkąt, w którym  $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$$= \sqrt{29}(\cos \alpha \cos \omega t + \sin \alpha \sin \omega t)$$
$$= \sqrt{29} \cos(\omega t - \alpha)$$



- 2 (a) W przypadku belki dachowej o długości 3 m nachylonej pod kątem  $35^\circ$  do poziomu, pozioma rozpiętość belki dana jest jako:

$$3 \cos 35^\circ = 2,457 \text{ m z dokładnością do trzech miejsc po przecinku,}$$

tak więc najlepsze oszacowanie poziomej rozpiętości to 2,45 m.

Zatem szerokość przybudówki wynosi

$$2 \cdot 2,45 = 4,9 \text{ m.}$$

- (b) W przypadku belki dachowej o długości 3 m nachylonej pod kątem  $35^\circ$  do poziomu, pionowa rozpiętość belki dana jest jako:

$$3 \sin 35^\circ = 1,721 \text{ m z dokładnością do trzech miejsc po przecinku,}$$

tak więc najlepsze oszacowanie pionowej rozpiętości to 1,72 m.

- 3 (a) Trójkąt o wymiarach  $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  to trójkąt prostokątny, w którym dłuższy bok to przeciwprostokątna.

Pocięcie boku o długości 100 cm na elementy o długości 4 cm da 25 elementów bez odpadów.

Pocięcie boku o długości 200 cm na elementy o długości 3 cm da 66 elementów i  $2 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$  odpadów.

Pocięcie boku o długości 200 cm na elementy o długości 4 cm da 50 elementów bez odpadów.

Pocięcie boku o długości 100 cm na elementy o długości 3 cm da 33 elementy i  $1 \text{ cm} \cdot 200 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$  odpadów.

Tak czy inaczej, cały arkusz możemy pociąć na  $50 \cdot 33 = 25 \cdot 66 = 1650$  prostokątów. Z każdego prostokąta wytniemy dwa trójkąty, więc całkowita liczba trójkątów wynosi 3300.

(b) Jeśli przy każdym cięciu traci się 1,25 mm (0,125 cm) stali, wówczas wymiary trójkąta odpowiednio się zwiększają.

Pocięcie boku o długości 100 cm na elementy o długości 4,125 cm da 24 elementy i 1,125 cm odpadów.

Pocięcie boku o długości 200 cm na elementy o długości 3,125 cm da 64 elementy bez odpadów.

Pocięcie boku o długości 200 cm na elementy o długości 4,125 cm da 48 elementów i 2,125 cm odpadów.

Pocięcie boku o długości 100 cm na elementy o długości 3,125 cm da 32 elementy bez odpadów.

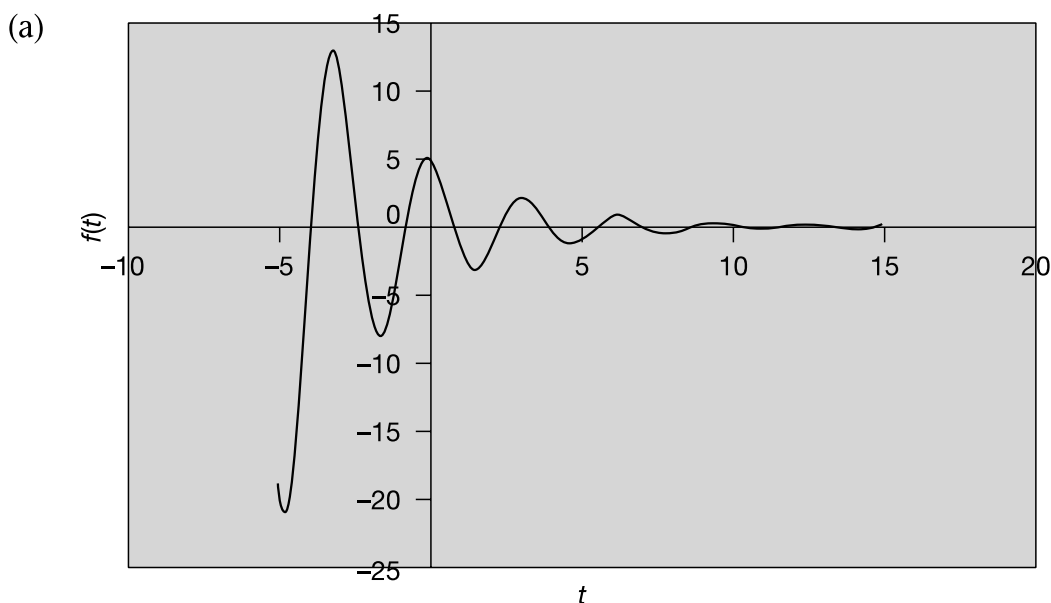
Tak czy inaczej, całkowita liczba prostokątów to:

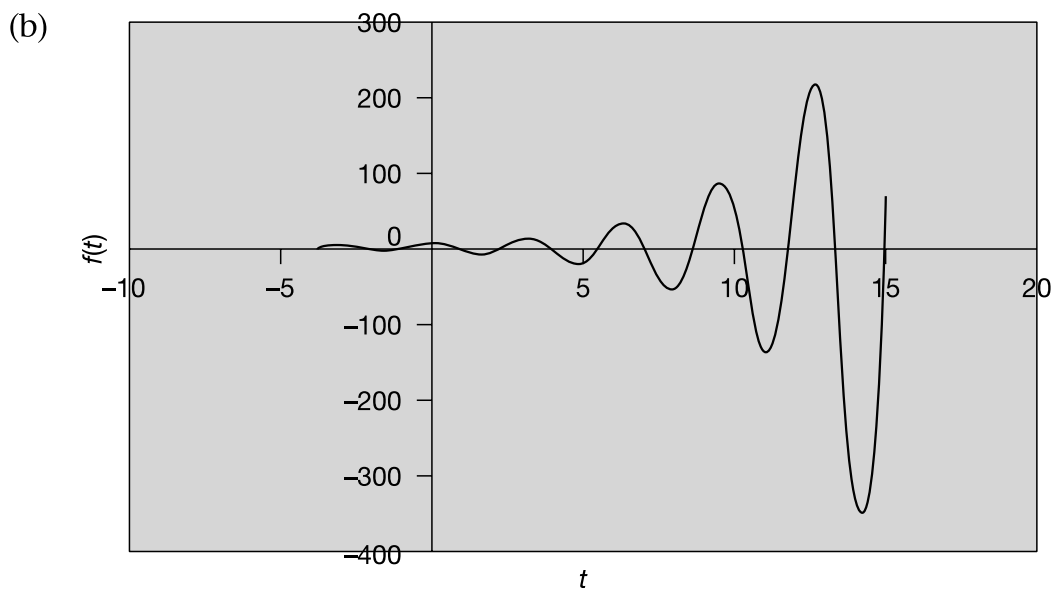
$$24 \cdot 64 = 1536 \text{ oraz } 48 \cdot 32 = 1536.$$

Zatem całkowita liczba trójkątów wynosi 3072.

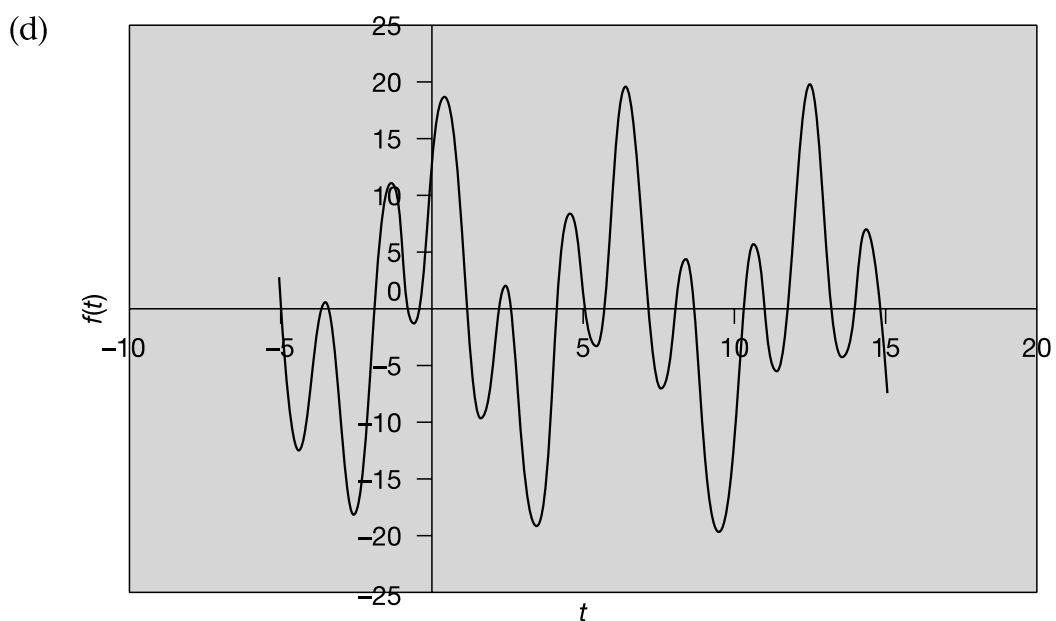
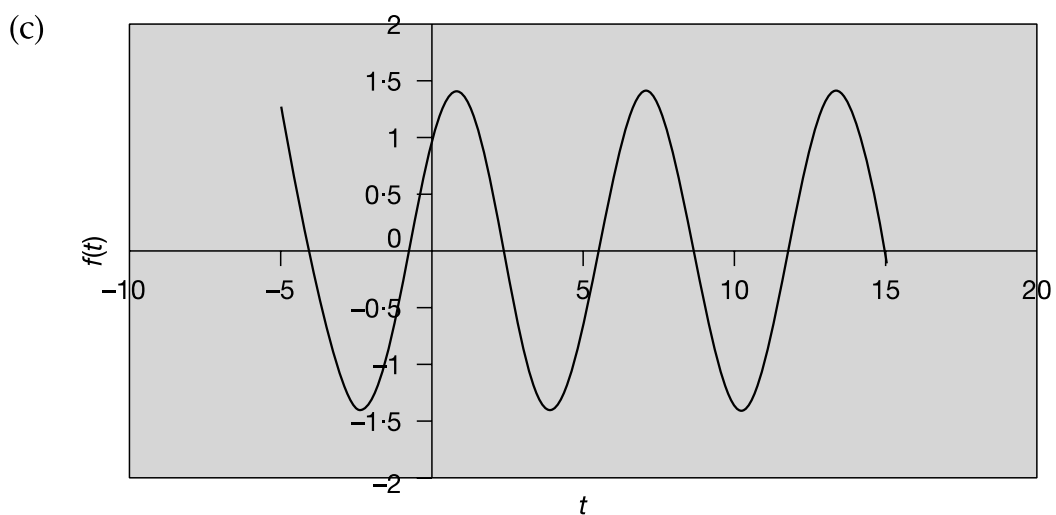
---

4





Wykres (a) przedstawia funkcję okresową o malejącej amplitudzie, podczas gdy wykres (b) przedstawia funkcję okresową o rosnącej amplitudzie.



Wykres (c) przedstawia funkcję okresową, podczas gdy wykres (d) przedstawia funkcję nieokresową. Po dodaniu dwóch funkcji okresowych utworzą one trzecią funkcję okresową tylko wtedy, gdy ich częstotliwości są współmierne. Tymczasem częstotliwości obu składników są niewspółmierne.

---