Dwumiany (dwumian Newtona)

1 Kwadratową tacę ciasno wypełniono metalowymi kulkami tak, że nie mogą się one przemieszczać. Kolejne kulki są ułożone warstwowo, tworząc piramidę. Ile kulek zawiera ta piramida, jeśli na jednym boku tacy umieszczono w pierwszej warstwie n kulek? Gdyby taca nie była kwadratowa, ale w kształcie trójkąt równobocznego, który mieści n kulek na jednym boku, ile kulek byłoby w tej piramidzie?

Skorzystaj z następujących wzorów:

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Odpowiedź Rozwiązanie

2 Z grupy siedmiu Francuzów i czterech Niemców należy utworzyć sześcioosobową międzynarodową komisję. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli w komisji ma się znaleźć:

(a) dokładnie 2 Niemców,

(b) co najmniej 2 Niemców.

Odpowiedź Rozwiązanie

3 Prostokątna metalowa płyta ma 4 otwory wywiercone wzdłuż każdego z dłuższych boków. W każdym otworze należy umieścić kolorową przelotkę. Spośród ośmiu dostępnych przelotek:
– dwie są niebieskie, jedna jasna, a druga ciemna, i muszą znajdować się po lewej stronie;
– jedna jest czerwona i musi znajdować się po prawej stronie;
– pozostałe pięć przelotek ma różne odcienie żółtego.
Na ile różnych sposobów można rozmieścić przelotki w płycie?

Odpowiedź Rozwiązanie

4 Zamek teczki składa się z trzech pierścieni, z których każdy jest oznaczony dwunastoma różnymi literami. Tylko jedna kombinacja trzech liter pozwala na otwarcie zamka. Na ile sposobów można podjąć nieudaną próbę otwarcia zamka?

Odpowiedź Rozwiązanie

Odpowiedzi

1 $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ oraz $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Pytanie Rozwiązanie

2 (a) 210

(b) 371

Pytanie Rozwiązanie

3 5760

Pytanie Rozwiązanie

4 1727

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 W dolnej warstwie piramidy znajduje się n^2 kulek. Kolejna warstwa to $(n-1)^2$ kulek, a w najwyższej warstwie piramidy znajduje się tylko jedna kulka. Zatem całkowita liczba kulek znajdujących się w piramidzie wynosi

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2 = \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}.$$

Jeśli taca jest trójkątem równobocznym, to liczba łożysk kulkowych w dolnej warstwie wynosi

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n).$$

W drugiej warstwie liczba łożysk wynosi

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{r=1}^{n-1} r = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}\left([n-1]^2 + [n-1]\right).$$

Następna warstwa zawiera

$$\begin{aligned}(n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{r=1}^{n-2} r &= \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left([n-2]^2 + [n-2]\right).\end{aligned}$$

Zatem liczba łożysk kulkowych w całej piramidzie wynosi

$$\sum_{r=1}^{n} r + \sum_{r=1}^{n-1} r + \sum_{r=1}^{n-2} r + \ldots + \sum_{r=1}^{2} r + \sum_{r=1}^{1} r = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} r\right).$$

Ale

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} r\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

Pytanie **Odpowiedź**

2 (a) Jeśli w komisji będzie dokładnie dwóch Niemców, to będzie w niej także czterech Francuzów. Dwóch Niemców można wybrać spośród czterech na

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6 \text{ sposobów.}$$

Czterech Francuzów można wybrać na

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5040}{6 \cdot 24} = 35 \text{ sposobów.}$$

Dlatego komisję można utworzyć na $6 \cdot 35 = 210$ różnych sposobów.

(b) Jeśli w komisji ma się znaleźć co najmniej dwóch Niemców, to może ona liczyć dwóch, trzech lub czterech Niemców.

Dokładnie dwóch Niemców daje $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} = 210$ różnych sposobów.

Dokładnie trzech Niemców daje $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} = \frac{4!}{1!1!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 140$ różnych sposobów.

Dokładnie czterech Niemców daje $\binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2} = \frac{4!}{0!4!} \cdot \frac{7!}{5!2!} = 21$ różnych sposobów.

Dlatego komitet może być utworzony na $210 + 140 + 21 = 371$ różnych sposobów.

Pytanie | Odpowiedź

3 Pierwszą z dwóch niebieskich przelotek, które należy założyć po lewej stronie, można umieścić w jednym z 4 otworów, a następnie drugą w jednym z 3 pozostałych otworów, czyli mamy

$4 \cdot 3$ możliwych rozmieszczeń niebieskich przelotek.

Czerwoną przelotkę, którą należy założyć po prawej stronie, można umieścić w jednym z czterech otworów, tak więc dwie niebieskie przelotki i jedną czerwoną można rozmieścić na

$4 \cdot 3 \cdot 4$ różne sposoby.

Pozostaje nam 5 otworów, w których należy umieścić żółte przelotki. Można je rozmieścić na 5! różnych sposobów dla każdego z możliwych rozmieszczeń przelotek niebieskich i czerwonej.

Mamy zatem $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5! = 5760$ możliwych rozmieszczeń przelotek.

Pytanie | Odpowiedź

4 Pierwszy pierścień można obrócić, aby wybrać literę na 12 różnych sposobów. Dla każdego z tych sposobów istnieje 12 sposobów wyboru drugiej litery, więc istnieje $12 \cdot 12 = 144$ sposobów wyboru pierwszych dwóch liter. Dla każdego z tych wyborów istnieje 12 sposobów wyboru trzeciej litery, więc w sumie jest

$12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ różnych kombinacji trzech liter.

Tylko jedna kombinacja otworzy teczkę, więc 1727 kombinacji jej nie otworzy.

Pytanie Odpowiedź