Wykresy

1 Duża populacja owadów zostaje wprowadzona do zamkniętego środowiska. Stwierdzono, że po t dniach od wprowadzenia liczba owadów N wyraża się wzorem

$$N = \frac{1500}{1 - 0{,}7e^{-0{,}03t}}.$$

(a) Ile owadów zostało pierwotnie wprowadzonych?

(b) Rozwiązując odpowiednie równanie, znajdź wartość t dla $N = 1900$.

(c) Naszkicuj wykres N w zależności od t dla $0 \leqslant t \leqslant 100$.

(d) Jaka będzie docelowa wartość N?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Liczbę defektów w próbnym procesie produkcyjnym odnotowano w poniższej tabeli:

Liczba godzin	1	2	3	4	5	6	7
Liczba defektów	20	30	52	77	135	165	180

Liczbę defektów n ujawnionych po t godzinach określa w przybliżeniu równanie

$n = ae^{kt}$, gdzie a i k są stałymi.

(a) Wyjaśnij, dlaczego, jeśli to równanie jest prawdziwe, wykres $\ln n$ w zależności od t będzie linią prostą.

(b) Narysuj wykres $\ln n$ w zależności od t dla danych z tabeli i pokaż, że pierwszych pięć punktów leży w przybliżeniu na linii prostej. Następnie, korzystając z wykresu, znajdź wartości stałych a i k.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

3 Ile kawałków kabla o długościach 245 cm i 84 cm można wyciąć ze szpuli kabla o długości 3000 cm, tak aby zminimalizować straty?

Odpowiedź **Rozwiązanie**

4 Dwie maszyny A i B pracujące jednocześnie zapewniają wydajność produkcyjną na poziomie odpowiednio $A(t)$ i $B(t)$, gdzie t oznacza czas. Używając arkusza kalkulacyjnego, narysuj wykresy $A(t)$ i $B(t)$ w jednym układzie współrzędnych, aby znaleźć pierwsze przybliżenie t, dla którego obie wartości pokrywają się, jeśli:

(a) $A(t) = 20t - 5$ oraz $B(t) = t^2 - t + 1$ dla $0 \leqslant t \leqslant 5$ z krokiem argumentu $t = 0{,}2$,

(b) $A(t) = t^2 - 2t + 3$ oraz $B(t) = 15 + t - 4t^2$ dla $0 \leqslant t \leqslant 5$ z krokiem argumentu $t = 0{,}2$,

(c) $A(t) = 25\cos t$ oraz $B(t) = e^t$ dla $0 \leqslant t \leqslant 5$ z t w radianach i z krokiem argumentu $t = 0{,}2$,

(d) $A(t) = 15\cos t$ oraz $B(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$ dla $0 \leqslant t \leqslant 4$ z krokiem argumentu $t = 0{,}2$.

Odpowiedź Rozwiązanie

Odpowiedzi

1

(a) 5000

(b) 40,05 dni

(d) 1500

Pytanie Rozwiązanie

2

(b) $a \cong 12{,}18$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku i $k \cong 0{,}48$

Pytanie Rozwiązanie

3

4 kawałki o długości 245 cm i 24 kawałki o długości 84 cm

Pytanie Rozwiązanie

4

(a) $t = 0{,}3$

(b) $t = 1{,}9$

(c) $t = 1{,}4$

(d) $t = 1{,}6$

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 (a) Wiemy, że $N = \dfrac{1500}{1 - 0{,}7e^{-0{,}03t}}$ w czasie t.

Jeśli $t = 0$, to $N = \dfrac{1500}{1 - 0{,}7e^{0}} = \dfrac{1500}{1 - 0{,}7} = 5000$, więc pierwotnie wprowadzono taką liczbę owadów.

(b) Aby znaleźć wartość t, gdy $N = 1900$, musimy rozwiązać równanie

$$1900 = \frac{1500}{1 - 0{,}7e^{-0{,}03t}}.$$

$$1900(1 - 0{,}7e^{-0{,}03t}) = 1500$$

$$1900 - 1900 \cdot 0{,}7^{-0{,}03t} = 1500$$

$$-1900 \cdot 0{,}7e^{-0{,}03t} = 1500 - 1900 = -400$$

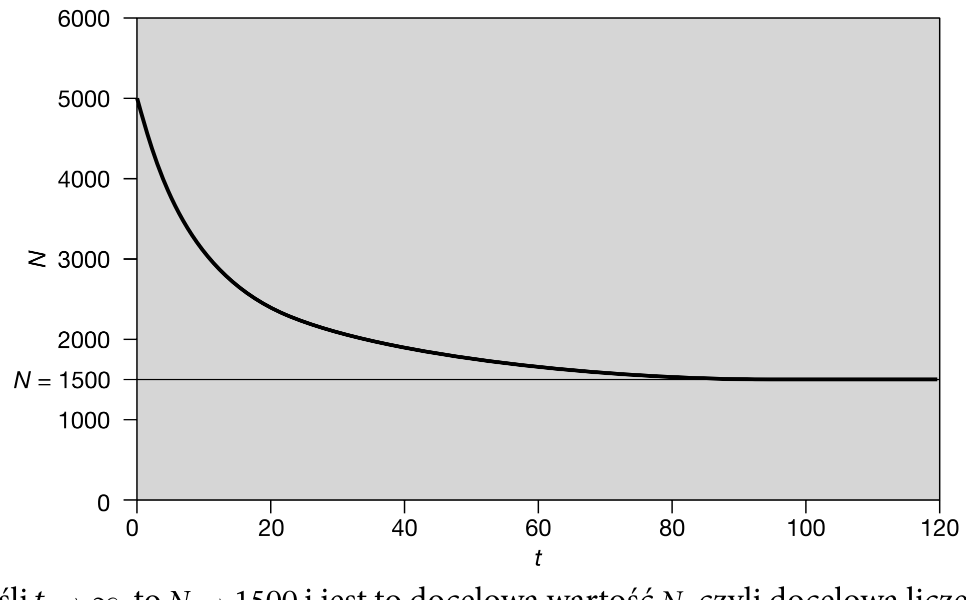
$$e^{-0{,}03t} = \frac{400}{1900 \cdot 0{,}7} = 0{,}30075\ldots$$

$$-0{,}03t = \ln(0{,}3008) = -1{,}20146\ldots,$$

więc

$$t = \frac{-1{,}2015}{-0{,}03} = 40{,}05 \text{ dni z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.}$$

(c)



(d) Jeśli $t \to \infty$, to $N \to 1500$ i jest to docelowa wartość N, czyli docelowa liczebność populacji.

Pytanie **Odpowiedź**

2 (a) Logarytmując obustronnie równanie $n = ae^{kt}$, otrzymamy:

$$\ln n = \ln\left(ae^{kt}\right) = \ln a + \ln e^{kt} = \ln a + kt \ln e = \ln a + kt, \text{ponieważ} \ln e = 1.$$

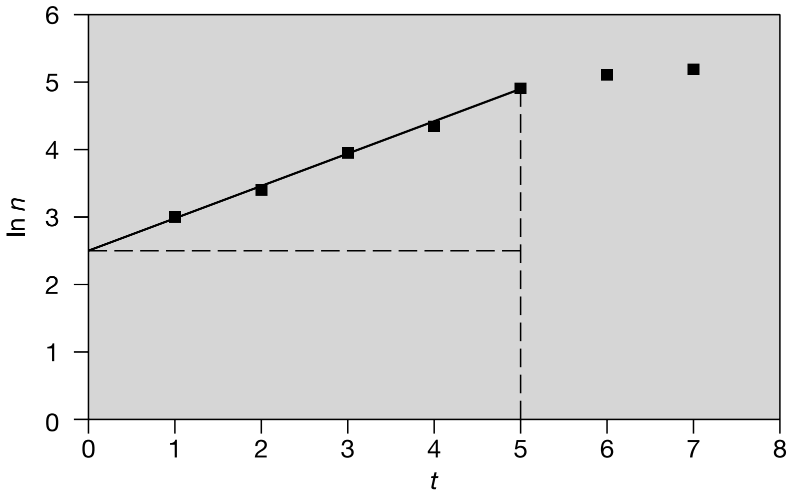
To równanie ma postać równania prostej $y = mx + c$, gdzie:

$y = \ln n$,
$x = t$,
$m = k$ – współczynnik kierunkowy,
$c = \ln a$ – rzędna punktu przecięcia prostej z osią y.

Dlatego wykreślenie $\ln n$ w zależności od t da linię prostą z współczynnikiem kierunkowym k i rzędną punktu przecięcia prostej z osią y o wartości $\ln a$.

(b)

liczba godzin	1	2	3	4	5	6	7
liczba defektów	20	30	52	77	135	165	180
$\ln n$	3,0	3,4	4,0	4,3	4,9	5,1	5,2



Pierwszych pięć punktów leży na prostej najlepszego dopasowania, która jest przedłużona do osi pionowej, abyśmy mogli znaleźć równanie tej prostej.
Z wykresu widzimy, że rzędna punktu przecięcia z osią pionową to $\ln n = \ln a = 2{,}5$, a więc wartość a wynosi

$a = e^{\ln a} \cong e^{2,5} = 12{,}18$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Współczynnik kierunkowy prostej najlepszego dopasowania wynosi w przybliżeniu

$$k \cong \frac{4{,}9 - 2{,}5}{5} = 0{,}48.$$

Równanie prostej najlepszego dopasowania wygląda zatem następująco

$\ln n = 12{,}18 + 0{,}48t$, więc $n = 12{,}18e^{0,48t}$.

Pytanie **Odpowiedź**

3 Niech x będzie liczbą kabli o długości 245 cm, a y liczbą kabli o długości 84 cm. Straty wynoszą wówczas

$$s = 3000 - 245x - 84y.$$

Maksymalna liczba kawałków kabla o długości 245 cm, które można wyciąć z kabla o długości 3000 cm, to 12 z ilością odpadów mniejszą niż 84 cm. Zatem tworzymy tabelę w arkuszu kalkulacyjnym z wartościami x od 12 do 0 w kolumnie A. W kolumnie B obliczamy długość kabla pozostałego po odcięciu określonej liczby kawałków o długości 245 cm, a następnie dzielimy tę liczbę przez 84, aby zobaczyć, ile kawałków o długości 84 cm można wyciąć z tego, co zostało. Stosowana przez nas formuła to

$$= (3000 - x * 245)/84.$$

Daje to liczbę, która nie jest całkowita, więc w kolumnie C używamy funkcji ZAOKR.DO.CAŁK, aby znaleźć najbliższą liczbę całkowitą mniejszą niż liczba w sąsiadującej komórce. Jest to wartość y. W kolumnie D stosujemy formułę

$$= 3000 - 245 * x - 84 * y,$$

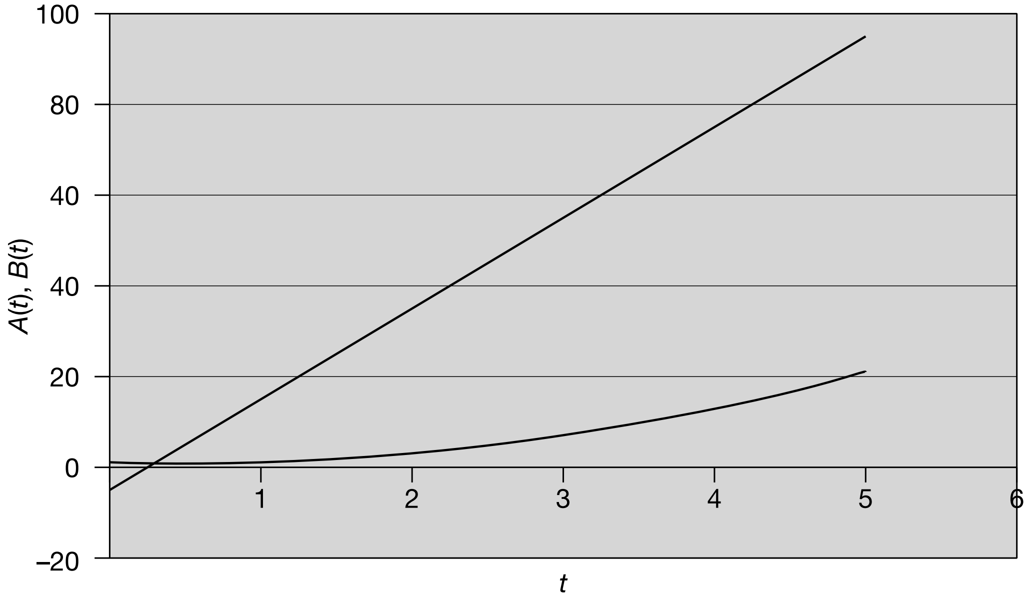
aby obliczyć straty.

x		y	*s*
12	0,714286	0	60
11	3,630952	3	53
10	6,547619	6	46
9	9,464286	9	39
8	12,38095	12	32
7	15,29762	15	25
6	18,21429	18	18
5	21,13095	21	11
4	24,04762	24	4
3	26,96429	26	81
2	29,88095	29	74
1	32,79762	32	67
0	35,71429	35	60

Oczywiście straty są minimalne, gdy potniemy kabel na 4 kawałki o długości 245 cm i 24 kawałki o długości 84 cm.

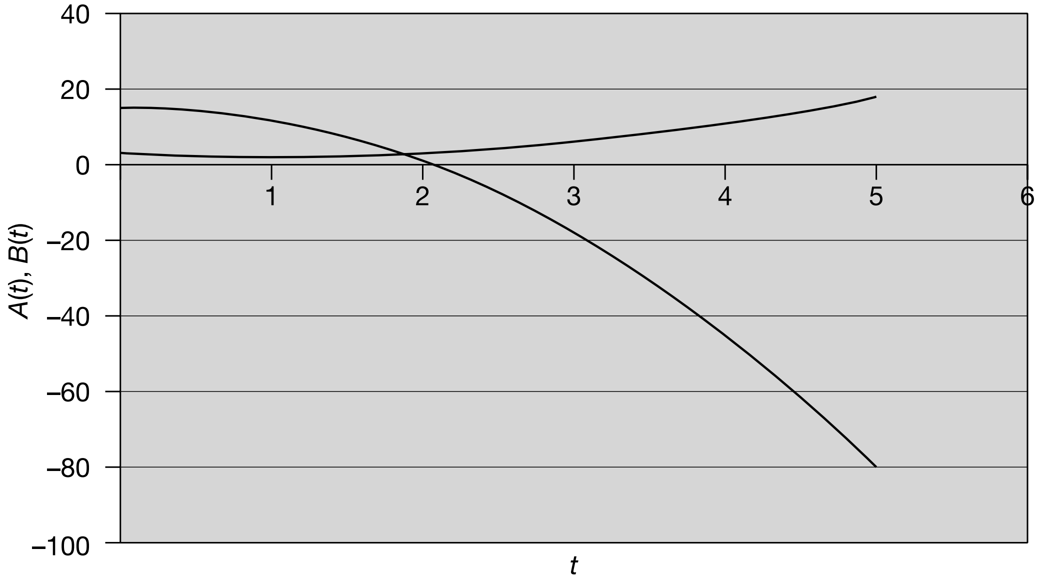
Pytanie **Odpowiedź**

4 (a) $A(t) = 20t - 5$ oraz $B(t) = t^2 - t + 1$ dla $0 \leqslant t \leqslant 5$ z krokiem argumentu $t = 0{,}2$



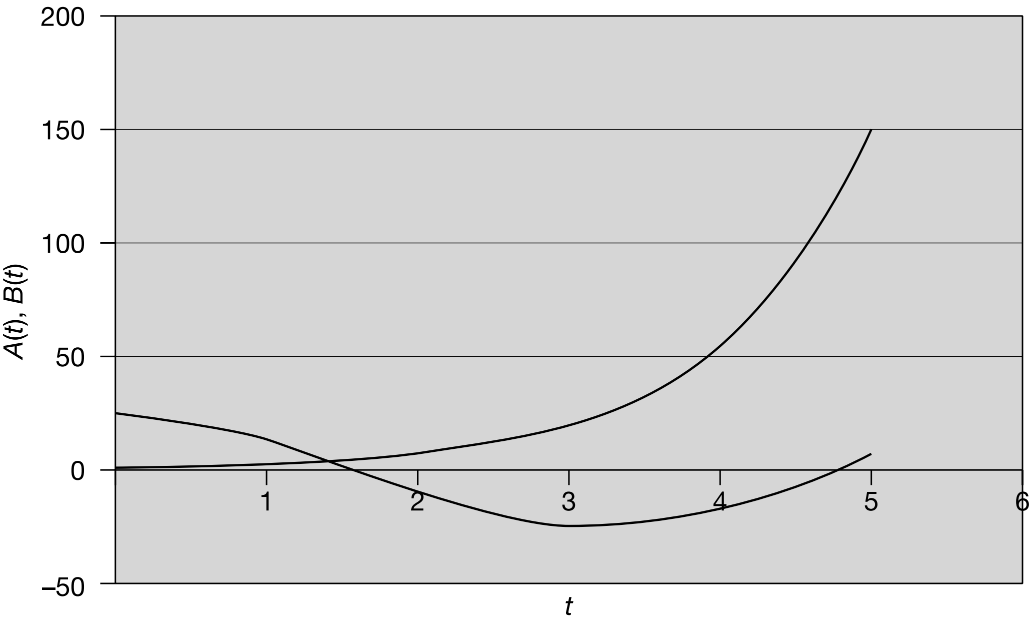
Przybliżona wartość punktu przecięcia wynosi $t = 0{,}3$.

(b) $A(t) = t^2 - 2t + 3$ oraz $B(t) = 15 + t - 4t^2$ dla $0 \leqslant t \leqslant 5$ z krokiem argumentu $t = 0{,}2$



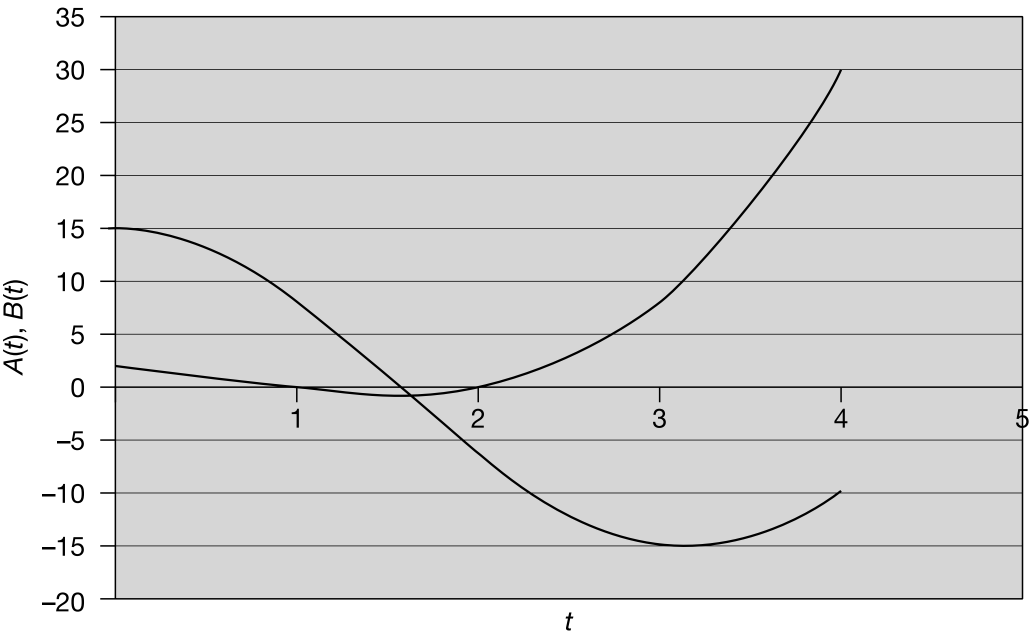
Przybliżona wartość punktu przecięcia wynosi $t = 1{,}9$.

(c) $A(t) = 25\cos t$ oraz $B(t) = e^t$ dla $0 \leqslant t \leqslant 5$ z t w radianach i z krokiem argumentu $t = 0{,}2$



Przybliżona wartość punktu przecięcia wynosi $t = 1{,}4$. Aby uzyskać e^t, użyj funkcji EXP(t).

(d) $A(t) = 15\cos t$ oraz $B(t) = t^3 - 2t^2 - t + 2$ dla $0 \leqslant t \leqslant 4$ z krokiem argumentu $t = 0{,}2$



Przybliżona wartość punktu przecięcia wynosi $t = 1{,}6$.

Pytanie **Odpowiedź**