

Wprowadzenie do algebry

- 1 W ramach procesu produkcji chemicznej mieszanka dwóch gazów zwiększyła swoją objętość o 15,9%. Jakie były proporcje mieszaniny na początku, jeśli jeden z gazów zwiększył swoją objętość o 4%, a drugi o 18%?
 - 2 Czas potrzebny pojazdowi na pokonanie określonej trasy jest wprost proporcjonalny do jej długości i odwrotnie proporcjonalny do prędkości. Prędkość jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z ilości paliwa zużytego na milę i odwrotnie proporcjonalna do liczby jednostek ładunku przewożonych przez pojazd. Aby pokonać trasę długości 25 mil w pół godziny z 18 jednostkami ładunku, potrzeba 10 litrów paliwa. Ile paliwa potrzeba, aby pokonać trasę długości 21 mil w 28 minut z 16 jednostkami ładunku?
 - 3 Brąz jest stopem miedzi, cynku oraz cyny zawiera 80% miedzi, 4% cynku i 16% cyny. Roztopiony mosiądz, który jest również stopem, zmieszano z roztopionym brązem w proporcji 3 części mosiądzu do 5 części brązu. Otrzymana mieszanina składa się z 74% miedzi, 16% cynku i 10% cyny. Określ procentowy skład mosiądzu.
-

Odpowiedzi

- 1 17 : 3
-

2 5,376 litra

3 64% miedzi, 36% cynku.

Rozwiązania

1 Niech V_1 i V_2 będą początkowymi objętościami każdego z dwóch gazów. Po zwiększeniu objętości mieszanki widzimy, że:

$$V_1 \cdot 1,18 + V_2 \cdot 1,04 = (V_1 + V_2) \cdot 1,159.$$

Dzieląc obustronnie przez V_2 , otrzymujemy

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot 1,18 + 1,04 = \left(\frac{V_1}{V_2} + 1\right) \cdot 1,159 = \frac{V_1}{V_2} \cdot 1,159 + 1,159.$$

Czyli

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot (1,18 - 1,159) = 1,159 - 1,04,$$

a zatem

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1,159 - 1,04}{1,18 - 1,159} = \frac{17}{3}.$$

Konsekwentnie

$$V_1 : V_2 = 17 : 3.$$

2 Symbol $a \propto b$ oznacza, że zmieniające się wielkości a oraz b są proporcjonalne, tzn. że iloraz $\frac{a}{b}$ jest wielkością stałą, czyli istnieje taka stała k , że $a = kb$.

Niech t oznacza czas w godzinach, d odległość w milach, v prędkość w milach na godzinę, f ilość paliwa zużytego na milę w litrach, a n liczbę jednostek ładunku.

Czas jest wprost proporcjonalny do odległości i odwrotnie proporcjonalny do prędkości, zatem:

$$t \propto \frac{d}{v}.$$

Prędkość jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z ilości paliwa zużytego na jedną milę i odwrotnie proporcjonalna do liczby jednostek ładunku, zatem:

$$v \propto \frac{\sqrt{f}}{n}.$$

Tak więc

$$t \propto \frac{nd}{\sqrt{f}}, \text{ co daje } t = k \frac{nd}{\sqrt{f}},$$

gdzie k jest stałą proporcjonalności.

Wiemy, że do pokonania trasy długości 25 mil w pół godziny z 18 jednostkami ładunku potrzeba 10 litrów paliwa, więc:

$$\frac{1}{2} = k \frac{18 \cdot 25}{\sqrt{10/25}}. \text{ Zatem } k = \frac{\sqrt{10}}{2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 18}, \text{ co daje } t = \frac{\sqrt{10}nd}{4500\sqrt{f}}.$$

Aby obliczyć ile paliwa potrzeba do przejechania 21 mil w 28 minut z 16 jednostkami ładunku, podstawiamy:

$$n = 16, d = 21 \text{ oraz } t = 28/60 \text{ i otrzymujemy}$$

$$\sqrt{f} = \frac{\sqrt{10}nd}{4500t} = \frac{\sqrt{10} \cdot 16 \cdot 21 \cdot 60}{4500 \cdot 28} = 0,50596 \dots,$$

co daje $f = 0,256$ litrów na milę.

Tak więc ilość paliwa zużytego na przebycie 21 mil to:

$$21 \cdot 0,256 = 5,376 \text{ litrów.}$$

3 W 100 g mosiądzu znajduje się:

x g miedzi,

y g cynku,

z g cyny.

Zatem jeśli 300 g mosiądzu zmieszano z 500 g brązu, aby uzyskać 800 g mieszanki, to otrzymana mieszanina zawiera:

$$3x + 5 \cdot 80 = 8 \cdot 74 \text{ g miedzi, co daje } 3x + 400 = 592,$$

$$\text{a więc } x = \frac{592 - 400}{3} = 64.$$

$$3y + 5 \cdot 4 = 8 \cdot 16 \text{ g cynku, co daje } 3y + 20 = 129,$$

$$\text{a więc } y = \frac{128 - 20}{3} = 36.$$

$$3z + 5 \cdot 16 = 8 \cdot 10 \text{ g cyny, co daje } 3z + 80 = 80,$$

$$\text{a więc } z = 0.$$

W związku z tym procentowy skład mosiądzu to 64% miedzi i 36% cynku.
