K.A. Stroud
Dexter J. Booth

MATEMATYKA OD ZERA DLA INŻYNIERA

Z języka angielskiego przełożyły

Agnieszka Apenuvor
Zofia Denkowska
Agnieszka Jarosz

WYDANIE POPRAWIONE
Korekta merytoryczna tłumaczenia
prof. dr hab. Tadeusz Stanisz

Pętla

Tytuł oryginału
Engineering Mathematics
Seventh Edition

First published in English by Palgrave Macmillan, a division of Macmillan Publishers Limited under the title Engineering Mathematics, 7th edition by K.A. Stroud and Dexter J. Booth. This edition has been translated and published under licence from Palgrave Macmillan. The authors have asserted their right to be identified as the author of this Work.

Korekta merytoryczna tłumaczenia **prof. dr hab. Tadeusz Stanisz**
Redakcja **Agnieszka Jarosz**
Tłumaczenie **Agnieszka Apenuvor**, **Zofia Denkowska**, **Agnieszka Jarosz**
Skład, łamanie, projekt graficzny okładki i stron tytułowych **Daniel Zarymbski**

ISBN 978-83-944283-0-3

Pętla Sp. z o.o.
ul. Biwakowa 4, 02-965 Warszawa
www.facebook.com/matematykastroud/
tel. 517 187 464

Szeregi 1

Czego się nauczę z tego programu?

Po ukończeniu tego programu będziesz potrafił:

- ☐ wykonywać działania na szeregach arytmetycznych i geometrycznych,
- ☐ wykonywać działania na szeregach liczb naturalnych w ustalonej potędze,
- ☐ określać granice szeregów arytmetycznych i geometrycznych,
- ☐ określać granice, kiedy mamy do czynienia z wyrażeniami nieoznaczonymi,
- ☐ zastosować różne kryteria zbieżności do szeregów nieskończonych,
- ☐ rozróżniać między zbieżnością bezwzględną a warunkową.

Szeregi

1 Jeżeli wyrazy ciągu $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(r), \ldots, f(n)$ doda się do siebie, aby utworzyć sumę

$$\sum_{r=1}^{n} f(r) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n),$$

to powstały w ten sposób twór nazywamy **szeregiem**: sumą wyrazów ciągu. Tak samo jak istnieje wiele typów ciągów, istnieje też wiele typów szeregów, a pierwszy typ, który przeanalizujemy, to szereg arytmetyczny, który tworzy się na podstawie ciągu arytmetycznego.

Przejdź do kolejnej ramki.

2

Szeregi arytmetyczne

W ramach przykładu szeregu arytmetycznego przyjrzyjmy się poniższemu:

$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \ldots$, który powstaje na podstawie ciągu 2, 5, 8, 11, 14, …

Zauważyłeś zapewne, że każdy kolejny wyraz powstaje w oparciu o poprzedni przez dodanie stałej równej 3. Ten stały wzrost nazywamy *różnicą* i można ją znaleźć, wybierając dowolny wyraz i odejmując od niego wyraz poprzedzający,

np. $11 - 8 = 3$; $5 - 2 = 3$ itd.

Przejdź do kolejnej ramki.

3 *Ogólny szereg arytmetyczny,* składający się z n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$f(r) = a + rd$,

można zapisać jako

$$\sum_{r=0}^{n-1}(a + rd) = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + (a + [n - 1]d).$$

Można to także zapisać jako

$$\sum_{r=0}^{n-1}(a + rd) = (a + [n - 1]d) + (a + [n - 2]d) + (a + [n - 3]d) + \ldots + a.$$

Po dodaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&2\sum_{r=0}^{n-1}(a + rd)\\ &= (2a + [n - 1]d) + (2a + [n - 1]d) + (2a + [n - 1]d) + \ldots + (2a + [n - 1]d)\\ &= n(2a + [n - 1]d)\end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{r=0}^{n-1}(a + rd) = \frac{n}{2}(2a + [n - 1]d).$$

W ramach rozgrzewki znajdź sumę początkowych 20 wyrazów szeregu

$10 + 6 + 2 - 2 - 6 \ldots$ itd.

Przejdź do ramki 4.

4

$$\boxed{\sum_{r=0}^{19}(10-4r) = -560}$$

Ponieważ

dla szeregu 10 + 6 + 2 – 2 – 6 … itd., $a = 10$ oraz $d = 6 - 10 = -4$.
Stąd dla $n = 20$,

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-1}(a+rd) &= \sum_{r=0}^{20-1}(10-4r)\\ &= \frac{n}{2}(2a+[n-1]d)\\ &= \frac{20}{2}(20-[20-1]4)\\ &= -560\end{aligned}$$

Oto jeszcze jeden przykład.

Jeżeli siódmy wyraz szeregu arytmetycznego to 22, a dwunasty wyraz to 37, znajdź jaki to szereg.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Wiemy, że siódmy wyraz} = 22 \therefore a+6d = 22\\ \text{oraz dwunasty wyraz} = 37 \therefore a+11d = 37\end{array}\right\} 5d = 15 \quad \begin{array}{l}\therefore d = 3\\ \therefore a = 4\end{array}$$

Szereg wygląda zatem następująco: 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + … itd.

Teraz jeszcze jeden przykład do wykonania dla ciebie.

Szósty wyraz szeregu arytmetycznego to –5, a wyraz dziesiąty to –21. Znajdź sumę początkowych 30 wyrazów.

5

$$\boxed{\textstyle\sum_{r=0}^{29}(15-4r) = -1290}$$

Ponieważ:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{szósty wyraz} = -5 & \therefore a+5d = -5\\ \text{dziesiąty wyraz} = -21 & \therefore a+9d = -21\end{array}\right\} 4d = -16 \quad \therefore d = -4, \text{ więc } a = 15$$

$$\therefore a = 15,\ d = -4,\ n = 30 \text{ oraz } \quad \sum_{r=0}^{n-1}(a+rd) = \frac{n}{2}(2a+[n-1]d)$$

$$\text{Stąd } \sum_{r=0}^{29}(15-4r) = \frac{30}{2}(30+29[-4]) = 15(30-116) = 15(-86) = -1290.$$

Średnia arytmetyczna

Czasami wymaga się od nas, byśmy znaleźli średnią arytmetyczną dwóch liczb P i Q. Oznacza to, że między P i Q musimy wstawić taką liczbę A, by $P + A + Q$ tworzyły szereg arytmetyczny.

$$A - P = d \text{ oraz } Q - A = d$$

$$\therefore A - P = Q - A \qquad 2A = P + Q \qquad \therefore A = \frac{P+Q}{2}$$

Średnia arytmetyczna dwóch liczb jest zatem po prostu ich średnią.

Stąd średnia arytmetyczna 23 i 58 to . . . .

6

$\boxed{40{,}5}$

Jeżeli wymaga się od nas wstawienia między liczby *P* i *Q* trzech średnich arytmetycznych sąsiadujących ze sobą wyrazów, oznacza to, że mamy podać trzy liczby *A*, *B* i *C* pomiędzy *P* i *Q*, tak by *P* + *A* + *B* + *C* + *Q* tworzyło szereg arytmetyczny.

Na przykład: Wstaw trzy średnie arytmetyczne między 8 a 18.

Niech średnie te będą oznaczone jako *A*, *B*, *C*.

Zatem 8 + *A* + *B* + *C* + 18 tworzy szereg arytmetyczny.

Pierwszy wyraz *a* = 8; piąty wyraz = *a* + 4*d* = 18.

$$\left.\begin{aligned} \therefore a &= 8 \\ a + 4d &= 18 \end{aligned}\right\} 4d = 10 \qquad \therefore d = 2{,}5$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 8 + 2{,}5 = 10{,}5 \\ B &= 8 + 5 = 13 \\ C &= 8 + 7{,}5 = 15{,}5 \end{aligned}\right\} \text{Szukane średnie arytmetycznie to } 10{,}5,\ 13,\ 15{,}5.$$

Znajdź teraz pięć średnich arytmetycznych sąsiadujących ze sobą wyrazów, zawartych pomiędzy 12 a 21,6.

Po skończeniu przejdź do ramki nr 7.

7

$\boxed{13{,}6,\ 15{,}2,\ 16{,}8,\ 18{,}4,\ 20}$

Obliczenia przedstawiono poniżej.

Niech pięć średnich arytmetycznych będzie oznaczone jako *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

Wtedy 12 + *A* + *B* + *C* + *D* + *E* + 21,6 tworzy szereg arytmetyczny.

$$\therefore a = 12; \qquad a + 6d = 21{,}6$$

$$\therefore 6d = 9{,}6 \qquad \therefore d = 1{,}6$$

$$\begin{aligned} \text{Zatem: } A &= 12 + 1{,}6 = 13{,}6 & A &= 13{,}6 \\ B &= 12 + 3{,}2 = 15{,}2 & B &= 15{,}2 \\ C &= 12 + 4{,}8 = 16{,}8 & C &= 16{,}8 \\ D &= 12 + 6{,}4 = 18{,}4 & D &= 18{,}4 \\ E &= 12 + 8{,}0 = 20{,}0 & E &= 20 \end{aligned}$$

Oto wynik! Jeśli się z tym uporałeś, to wszystkie inne przypadki wyglądają dokładnie tak samo. Teraz sprawdzimy, ile zapamiętałeś z *ciągów geometrycznych*.

Przejdź zatem do ramki nr 8.

8

Szeregi geometryczne

Przykład szeregu geometrycznego to następujący szereg:

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$ itd.

Widzimy, że każdy wyraz możemy zapisać na podstawie poprzedniego, mnożąc go przez stały czynnik 3. Czynnik ten nazywamy *ilorazem* i możemy go uzyskać, biorąc dowolny wyraz i dzieląc go przez wyraz poprzedni,

np. $27 : 9 = 3$; $9 : 3 = 3$ itd.

Szereg geometryczny przyjmuje zatem postać

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ itd.,

gdzie *a* - pierwszy wyraz, *r* - iloraz.

Szereg geometryczny 5 – 10 + 20 – 40 + … itd. ma zatem iloraz *r* równy . . . .

9

$$\boxed{r = \frac{20}{-10} = -2}$$

Ogólny *szereg geometryczny*, zawierający n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$f(k) = ar^k,$$

można zapisać jako

$$\sum_{k=0}^{n-1}(ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}.$$

Zauważ, że używamy tutaj k jako symbolu liczącego, a nie r, który już użyliśmy dla ilorazu. Pomnożenie powyższego wzoru przez r daje nam

$$r\sum_{k=0}^{n-1}(ar^k) = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n.$$

Po odjęciu drugiego wzoru od pierwszego otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{n-1}(ar^k) - r\sum_{k=0}^{n-1}(ar^k) = a - ar^n = a(1 - r^n).$$

Zatem

$$\sum_{k=0}^{n-1}(ar^k) = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

W ramach rozgrzewki znajdź sumę ośmiu początkowych wyrazów szeregu

$$8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots \text{ itd.}$$

Następnie przejdź do ramki nr 10.

10

$$\boxed{\sum_{k=0}^{7} 8\left(\frac{1}{2}\right)^k = 15\frac{15}{16}}$$

Ponieważ

dla szeregu $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots$ itd., $a = 8$ oraz $r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, oraz $n = 8$.

Stąd:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} ar^k &= \sum_{k=0}^{8-1} 8\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ &= \frac{8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 8 : \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{256}\right) = 16 \cdot \frac{255}{256} = \frac{255}{16} = 15\frac{15}{16}\end{aligned}$$

Spróbuj rozwiązać jeszcze jeden przykład.

Jeżeli piąty wyraz szeregu geometrycznego to 162, a wyraz ósmy to 4374, znajdź ten szereg.

Mamy: piąty wyraz $= 162 \quad \therefore\ ar^4 = 162$

ósmy wyraz $= 4374 \quad \therefore\ ar^7 = 4374$

$$\frac{ar^7}{ar^4} = \frac{4374}{162}$$

$$\therefore\ r^3 = 27$$

$$\therefore\ r = 3$$

$$\therefore\ a = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

11

$$\boxed{a = 2}$$

Ponieważ

$ar^4 = 162,\ \ ar^7 = 4374$ oraz $r = 3$.

$$\therefore\ a \cdot 3^4 = 162 \quad \therefore\ a = \frac{162}{81} \quad \therefore\ a = 2$$

$\therefore$ Szereg to $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$ itd.

Skoro znamy teraz wartości a i r, możemy obliczyć wartość dowolnego wyrazu lub sumę danej liczby wyrazów.

Dla tego samego szeregu znajdź:

(a) dziesiąty wyraz,

(b) sumę początkowych dziesięciu wyrazów.

Po skończeniu przejdź do ramki nr 12.

12

$$\boxed{39\,366,\quad 59\,048}$$

Ponieważ $a = 2,\ \ r = 3$.

(a) dziesiąty wyraz $= ar^9 = 2 \cdot 3^9 = 2 \cdot 19\,683 = 39\,366$

(b) $$\sum_{k=0}^{9} 2 \cdot 3^k = \frac{a(1 - r^{10})}{1 - r} = \frac{2(1 - 3^{10})}{1 - 3}$$

$$= \frac{2(1 - 59\,049)}{-2} = 59\,048$$

Średnia geometryczna

Średnia geometryczna dwóch danych liczb P i Q o tym samym znaku to liczba A, taka że $P + A + Q$ tworzy szereg geometryczny.

$$\frac{A}{P} = r \text{ oraz } \frac{Q}{A} = r$$

$$\therefore\ \frac{A}{P} = \frac{Q}{A} \quad \therefore\ A^2 = PQ \quad A = \sqrt{PQ}$$

Stąd średnia geometryczna dwóch liczb to pierwiastek kwadratowy ich iloczynu.

Dlatego też średnia geometryczna liczb 4 i 25 wynosi . . . .

13

$$\boxed{A = \sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10}$$

Aby wstawić trzy średnie geometryczne sąsiadujących ze sobą wyrazów pomiędzy dane liczby P i Q, należy wstawić trzy liczby A, B, C, takie że $P + A + B + C + Q$ tworzą szereg geometryczny.

Na przykład, wstawmy cztery średnie geometryczne pomiędzy 5 a 1215.

Oznaczmy te średnie jako A, B, C, D. Wtedy $5 + A + B + C + 1215$ tworzy szereg geometryczny,

tzn. $a = 5$, a $ar^5 = 1215$.

$\therefore\ r^5 = \dfrac{1215}{5} = 243 \quad \therefore\ r = 3$

$\therefore\ A = 5 \cdot 3 = 15$

$B = 5 \cdot 9 = 45$

$C = 5 \cdot 27 = 135$

$D = 5 \cdot 81 = 405$

Szukane średnie geometryczne to 15, 45, 135, 405.

Teraz jeden przykład do wykonania przez ciebie. Wstaw dwie średnie geometryczne sąsiadujących ze sobą wyrazów pomiędzy 5 a 8,64.

Po skończeniu przejdź do ramki nr 14.

14

$$\boxed{\text{Szukane średnie geometryczne to } 6{,}0,\ 7{,}2}$$

Ponieważ,

kiedy oznaczmy średnie jako A i B,

wtedy $5 + A + B + 8{,}64$ tworzy szereg geometryczny.

$\therefore\ a = 5; \quad \therefore\ ar^3 = 8{,}64; \quad \therefore\ r^3 = 1{,}728; \quad \therefore\ r = 1{,}2$

$$\left.\begin{aligned} A &= 5 \cdot 1{,}2 = 6{,}0 \\ B &= 5 \cdot 1{,}44 = 7{,}2 \end{aligned}\right\} \text{Szukane średnie to 6,0 oraz 7,2.}$$

Oczywiście szeregi arytmetyczne i geometryczne są specjalnymi typami szeregów. Istnieją także inne specjalne typy szeregów, które warto znać. Składają się one z szeregów potęg liczb naturalnych. Przyjrzymy się im w kolejnej ramce.

Szeregi liczb naturalnych w ustalonej potędze

15

Suma liczb naturalnych

Szereg $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \sum_{r=1}^{n} r$.

Szereg ten, jak widzisz, jest przykładem szeregu arytmetycznego, gdzie $a = 1$, a $d = 1$. Suma początkowych n wyrazów dana jest jako:

$$\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$$

$$= \frac{n}{2}(2a + [n-1]d) = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$$

Zatem suma początkowych 100 liczb naturalnych dodatnich to ....

Przejdź teraz do ramki nr 16.

16

$$\boxed{\sum_{r=1}^{100} r = 5050}$$

Ponieważ:

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$$

Suma kwadratów

Powyższy przykład był bardzo prosty. Spójrzmy teraz na inny. Aby znaleźć sumę n wyrazów szeregu $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2$, wykorzystamy następującą tożsamość:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Możemy ją zapisać jako

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Zastąpienie n przez $n - 1$ daje nam

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

i ponownie $(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$

oraz $(n-2)^3 - (n-3)^3 = 3(n-3)^2 + 3(n-3) + 1.$

Wielokrotne powtórzenie tej procedury da nam:

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

Jeżeli teraz dodamy do siebie te wyniki, to widzimy, że po lewej stronie znikają wszystkie wyrazy poza pierwszym i ostatnim.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 1^3 &= 3\left\{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2\right\} \\ &\quad + 3\left\{n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1\right\} + n \cdot 1 \\ &= 3\sum_{r=1}^{n} r^2 + 3\sum_{r=1}^{n} r + n\end{aligned}$$

$$\therefore\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 = 3\sum_{r=1}^{n} r^2 + 3\sum_{r=1}^{n} r + n = 3\sum_{r=1}^{n} r^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\therefore\ n^3 + 3n^2 + 2n = 3\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{3}{2}(n^2 + n)$$

$$\therefore\ 2n^3 + 6n^2 + 4n = 6\sum_{r=1}^{n} r^2 + 3n^2 + 3n$$

$$6\sum_{r=1}^{n} r^2 = 2n^3 + 3n^2 + n$$

$$\therefore\ \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Zatem suma dwunastu początkowych wyrazów szeregu $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$ wynosi ....

17

$\boxed{650}$

Ponieważ $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

więc $\sum_{r=1}^{12} r^2 = \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} = 26 \cdot 25 = 650.$

Suma sześcianów

Sumę sześcianów liczb naturalnych otrzymujemy w bardzo podobny sposób. Tym razem skorzystamy z następującej tożsamości:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

Podobnie jak poprzednio zapiszemy ją inaczej jako

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Jeżeli wykonamy teraz ten sam chwyt co poprzednio i zastąpimy n przez $(n-1)$ wielokrotnie, to w końcu uzyskamy następujący wynik:

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

W międzyczasie zauważ, że $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\sum_{r=1}^{n} r\right\}^2$.

18

Zbierzmy teraz trzy ostatnie wyniki. Oto one.

1 $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$

2 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3 $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

Są one bardzo przydatne, więc przepisz je do swojego notatnika.

Przejdź teraz do ramki nr 19, gdzie będziesz miał okazję zobaczyć przykład użycia tych wyników.

19

Znajdź sumę szeregu $\sum_{r=1}^{5} r(3+2r)$.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{5} r(3+2r) &= \sum_{r=1}^{5}(3r+2r^2)\\ &= \sum_{r=1}^{5} 3r + \sum_{r=1}^{5} 2r^2 = 3\sum_{r=1}^{5} r + 2\sum_{r=1}^{5} r^2\\ &= 3\cdot\frac{5\cdot 6}{2} + 2\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6} = 45 + 110 = 155\end{aligned}$$

Jest to tylko kwestia zastosowania już wypracowanych wyników. Poniżej mamy jeszcze jeden przykład dla ciebie do wykonania w ten sam sposób.

Znajdź sumę szeregu $\sum_{r=1}^{4}(2r+r^3)$.

Obliczenia znajdziesz w ramce nr 20.

20

$\boxed{120}$

Ponieważ: $\sum_{r=1}^{4}(2r+r^3) = 2\sum_{r=1}^{4}r + \sum_{r=1}^{4}r^3$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 5}{2} + \left\{\frac{4\cdot 5}{2}\right\}^2 = 20 + 100 = 120$$

Pamiętaj, że:

$$\text{Suma początkowych } n \text{ liczb naturalnych} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Suma kwadratów początkowych } n \text{ liczb naturalnych} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Suma sześcianów początkowych } n \text{ liczb naturalnych} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

Szeregi nieskończone

21 Do tej pory zajmowaliśmy się skończoną liczbą wyrazów szeregu. Gdy mamy do czynienia z sumą nieskończonej liczby wyrazów szeregu musimy ostrożnie wykonywać kolejne kroki.

Na przykład, rozważmy szereg nieskończony $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ ad inf, gdzie „ad inf” jest skrótem od łacińskiego *ad infinitum*, co oznacza *i tak dalej, bez końca.*

Rozpoznajemy tu szereg *nieskończony* geometryczny, w którym $a = 1$ oraz $r = \frac{1}{2}$. Suma początkowych n wyrazów dana jest zatem jako (patrz ramka nr 9):

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1\left(1-\left[\frac{1}{2}\right]^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

Jeżeli n rośnie, 2^n też rośnie, więc $\frac{1}{2^n}$ maleje do zera (patrz ramka nr 45, w programie 10), czyli

dla $n \to \infty$, $\quad \frac{1}{2^n} \to 0$.

Stąd:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\left[2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$= 2\left(1-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2^n}\right]\right)$$

$$= 2(1-0)$$

$$= 2$$

Mamy skrócony zapis dla granicy po lewej, a mianowicie:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Zatem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

Uważaj na ten zapis. Wydawać się może, że sugeruje on, iż możemy dodać nawet nieskończoną liczbę wyrazów, a tak nie jest, pomimo, że często odnosimy się do *sumy nieskończonej liczby wyrazów*. Jak zwykle, musimy poddać się tradycjom i przyjąć ten opis, lecz upewnij się, że rozumiesz, iż oznacza to *granicę*, czyli że możemy wziąć sumę szeregu dowolnie bliską wartości 2, biorąc odpowiednio dużą liczbę wyrazów.

Kolejna ramka.

22

Nie zawsze jest to możliwe z szeregami nieskończonymi, jako że dla szeregów arytmetycznych sprawy mają się zgoła inaczej.

Rozważmy nieskończony szereg $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$
Jest to szereg arytmetyczny, w którym $a = 1$ oraz $d = 2$.

Wtedy: $$\sum_{r=0}^{n-1} (1 + 2r) = \frac{n}{2}(2a + [n-1]d)$$
$$= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2)$$
$$= n^2$$

Oczywiście, w tym przypadku dla odpowiednio dużego n wartość n^2 jest bardzo duża. W rzeczywistości dla $n \to \infty$, $n^2 \to \infty$, która nie jest określoną wartością liczbową i dlatego jest dla nas mało użyteczna.
Zawsze tak się dzieje z szeregami arytmetycznymi. Gdy staramy się znaleźć sumę nieskończonej liczby wyrazów, zawsze otrzymujemy $+\infty$ lub $-\infty$ w zależności od szeregu.

Przejdź do ramki nr 23.

23

W poprzednich dwóch ramkach poczyniliśmy dwa istotne spostrzeżenia:

(a) Nie można obliczyć sumy nieskończonej liczby wyrazów szeregu arytmetycznego, ponieważ wynik zawsze będzie nieskończonością.

(b) Czasami możemy obliczyć sumę nieskończonej liczby wyrazów szeregu geometrycznego:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$ i *pod warunkiem, że* $|r| < 1$, wtedy dla $n \to \infty$, $r^n \to 0$.

W tym przypadku:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Znajdź zatem sumę nieskończonej liczby wyrazów następującego szeregu:

$20 + 4 + 0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}032 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

24

$\boxed{25}$

Ponieważ

dla szeregu $20 + 4 + 0{,}8 + 0{,}16 + 0{,}032 + \ldots$

$$a = 20; \quad r = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2 = \frac{1}{5} \quad \therefore \sum_{k=0}^{\infty} 20\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{a}{1-r} = \frac{20}{1-\frac{1}{5}} = 20 \cdot \frac{5}{4} = 25$$

Granice

25 W tym programie widzieliśmy już, że czasami musimy określić granicę sumy n wyrazów dla $n \to \infty$. Zanim zakończymy ten temat, przyjrzyjmy się nieco bliżej metodom znajdowania granic. Wystarczy nam kilka przykładów.

Przejdź do ramki nr 26.

26 **Przykład 1**

Znajdźmy granicę $\dfrac{5n+3}{2n-7}$ dla $n \to \infty$.

Nie możemy po prostu podstawić $n \to \infty$ do wyrażenia i uprościć wynik, ponieważ ∞ nie jest zwykłą liczbą i nie podlega normalnym zasadom. Musimy zrobić to w następujący sposób:

$$\frac{5n+3}{2n-7} = \frac{5+3/n}{2-7/n} \quad \text{(Dzielenie licznika i mianownika przez } n\text{).}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5n+3}{2n-7}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+3/n}{2-7/n}$$

Teraz dla $n \to \infty$, $3/n \to 0$ oraz $7/n \to 0$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{2n-7} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+3/n}{2-7/n} = \frac{5+0}{2-0} = \frac{5}{2}$$

Możemy zawsze poradzić sobie z ułamkami w postaci $\dfrac{c}{n}, \dfrac{c}{n^2}, \dfrac{c}{n^3}$ itp., ponieważ dla $n \to \infty$, każdy z nich dąży do zera, które jest określoną wartością.

Spróbujmy wykonać jeszcze jeden przykład.

Przejdź do kolejnej ramki.

27 **Przykład 2**

Znajdźmy granicę $\dfrac{2n^2+4n-3}{5n^2-6n+1}$ dla $n \to \infty$.

Po pierwsze, podzielmy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n, którą widzimy w wyrażeniu. W tym przypadku jest to n^2.

$$\frac{2n^2+4n-3}{5n^2-6n+1} = \frac{2+4/n-3/n^2}{5-6/n+1/n^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n-3}{5n^2-6n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+4/n-3/n^2}{5-6/n+1/n^2} = \frac{2+0-0}{5-0+0} = \frac{2}{5}$$

Przykład 3

Znajdźmy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2}{2n^3+3n-4}$.

W tym przypadku najpierw należy ....

Przejdź do ramki nr 28.

$\boxed{\text{Podzielić licznik i mianownik przez } n^3}$ **28**

Dobrze. Otrzymujemy:

$$\frac{n^3-2}{2n^3+3n-4} = \frac{1-2/n^3}{2+3/n^2-4/n^3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{2n^3+3n-4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Skończ ten przykład. Następnie przejdź do ramki nr 29.

$\boxed{\dfrac{1}{2}}$ **29**

Kolejna ramka.

Szeregi zbieżne i rozbieżne **30**

Szereg, w którym suma n wyrazów szeregu dąży do określonej wartości dla $n \to \infty$, nazywamy *szeregiem zbieżnym*. Jeżeli suma nie dąży do określonej wartości dla $n \to \infty$, szereg taki nazywamy *szeregiem rozbieżnym*.

Na przykład, rozważmy szereg geometryczny $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$

Wiemy, że dla szeregu geometrycznego $\sum\limits_{k=0}^{n-1} ar^k = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, zatem w tym przypadku, dla $a = 1$ oraz $r = \frac{1}{3}$, mamy:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\therefore \text{Dla } n\to\infty,\ \frac{1}{3^n}\to 0. \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}$$

Suma n wyrazów szeregu dąży do określonej wartości $\frac{3}{2}$ dla $n \to \infty$.

Stąd jest to szereg ....
(zbieżny/rozbieżny)

31

$\boxed{\text{zbieżny}}$

Jeśli $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ dąży do określonej wartości dla $n \to \infty$, szereg jest *zbieżny*.
Jeśli $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ nie dąży do określonej wartości dla $n \to \infty$, szereg jest *rozbieżny*.

Przyjrzyjmy się teraz jeszcze jednemu szeregowi:

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$

Jest to szereg geometryczny z $a = 1$ i $r = 3$.

$$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1(1-3^n)}{1-3} = \frac{1-3^n}{-2}$$
$$= \frac{3^n - 1}{2}$$

Oczywiście, dla $n \to \infty$, $3^n \to \infty$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \infty \text{ (która nie jest określoną wartością liczbową).}$$

Zatem w tym przypadku, szereg jest ....

32

$\boxed{\text{rozbieżny}}$

Szeregi nieskończone przydają się tylko, gdy są one zbieżne. W związku z tym konieczne jest, byśmy mieli dostępne narzędzia do testowania zbieżności szeregu.

Oczywiście możemy określać granicę sumy n wyrazów dla $n \to \infty$, tak jak to robiliśmy w poprzednich przykładach i da nam to bezpośrednią odpowiedź na pytanie, czy szereg jest zbieżny, czy też nie.

Jest to fundamentalny test, jednakże w wielu przypadkach nie jest łatwo znaleźć wzór na sumę n wyrazów i dlatego też musimy znaleźć test zbieżności, który korzysta z samych wyrazów.

Przypomnij sobie ogólny zapis dla szeregów. Wyrazy będziemy oznaczać jako
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$

Przejdź do ramki nr 33.

33

Testy zbieżności

Test 1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nie może być zbieżny, jeżeli jego wyrazy nie dążą do zera, tzn. jeżeli nie jest spełniony warunek $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

Na zdrowy rozsądek, gdy suma ma się zbliżać do konkretnej wartości wraz ze wzrostem n, wówczas wartość liczbowa poszczególnych wyrazów musi maleć. Dla przykładu widzieliśmy już, że:

(a) szereg $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$ jest zbieżny,

podczas gdy (b) szereg $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$ jest rozbieżny.

Co możesz powiedzieć na temat następującego szeregu:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots ?$$

Po rzuceniu na niego okiem sądzisz, że jest on zbieżny czy rozbieżny?

34

Większość zapewne powiedziałaby, że szereg jest zbieżny, bo jasne jest, że wartość liczbowa wyrazów maleje wraz ze wzrostem n. Jeżeli tak odpowiedziałeś, to muszę cię zmartwić, że jesteś w błędzie. Za chwile zobaczymy, że w rzeczywistości szereg

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \text{ jest rozbieżny.}$$

Pytanie było nieco podchwytliwe, lecz spójrz jeszcze raz na naszą regułę:

Szereg nie może być zbieżny, jeżeli jego wyrazy nie dążą do zera, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Nie mówi ona o tym, że gdy tylko wyrazy dążą do zera, to szereg jest zbieżny, co potwierdza nasz przykład.

W praktyce możemy użyć reguły w następującej formie:

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, szereg *może* być zbieżny lub rozbieżny; przypadek wymaga dalszej analizy.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ możemy być pewni, że szereg jest rozbieżny.

Zanotuj sobie i zapamiętaj te dwa stwierdzenia.

35

Zanim pozostawimy szereg

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

przedstawimy dowód na to, iż mimo że $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, szereg nie jest zbieżny.

Jeżeli chcemy, możemy oczywiście pogrupować wyrazy w następujący sposób:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\} + \left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right\} + \ldots$$

Teraz $\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\} > \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2}$

oraz $\left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right\} > \left\{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right\} = \frac{1}{2}$ itd.

Zatem $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = \infty$$

Nie jest to określona wartość liczbowa, zatem szereg jest . . . .

36

rozbieżny

To, co możemy uzyskać z testu 1, to tyle, że szereg *może* być zbieżny. Musimy zatem zastosować kolejny test.

Test 2: Kryterium porównawcze

Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeśli jego wyrazy są mniejsze niż odpowiednie wyrazy dodatniego szeregu, o którym wiemy, że jest zbieżny. Podobnie, szereg jest rozbieżny, jeżeli jego wyrazy są większe niż odpowiednie wyrazy szeregu, o którym wiemy, że jest rozbieżny. W kilku przykładach pokażemy ci, jak stosować ten konkretny test.

Przejdź zatem do kolejnej ramki.

37

Aby zbadać szereg

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^6}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots,$$

musimy porównać go z szeregiem

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\ldots,$$

o którym wiemy, że jest zbieżny.

Jeśli porównamy odpowiednie wyrazy, to po pierwszych dwóch widzimy, że $\frac{1}{3^3}<\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{4^4}<\frac{1}{2^4}$ i tak dalej dla wszystkich kolejnych wyrazów z wyjątkiem dwóch początkowych. Wyrazy pierwszego ciągu są w każdym przypadku mniejsze od odpowiadających im wyrazów ciągu, o którym wiemy, że jest zbieżny.

Pierwszy szereg jest zatem …………

38

zbieżny

Trudność z testem porównawczym polega na tym, by wiedzieć jaki szereg zbieżny użyć za punkt odniesienia. Bardzo użyteczny do tego celu jest następujący szereg:

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

Można wykazać, że:

(a) dla $p>1$ szereg jest zbieżny,

(b) dla $p\le 1$ szereg jest rozbieżny.

Co powiesz zatem na temat szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$?

Jest on zbieżny czy rozbieżny?

39

zbieżny

Ponieważ szereg $\sum\frac{1}{n^2}$, to szereg $\sum\frac{1}{n^p}$ z $p>1$.

Spójrzmy teraz na inny przykład.

Sprawdź zbieżność szeregu $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

Jeżeli zastosujemy nasz standardowy szereg

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \dots,$$

gdzie $p = 2$, to otrzymamy

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots,$$

o którym wiemy, że jest zbieżny.

Jednakże $\frac{1}{1 \cdot 2} < \frac{1}{1^2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3 \cdot 4} < \frac{1}{3^2}$ itd.

Każdy z wyrazów danego szeregu jest mniejszy od odpowiadających mu wyrazów w szeregu, o którym wiemy, że jest zbieżny.

Zatem . . . .

40

Dany szereg jest zbieżny

Nie zawsze łatwo jest znaleźć odpowiedni szereg do użycia jako punkt odniesienia. Dlatego też spójrzmy na kolejny test, który możemy zastosować.

Test 3: Kryterium d'Alemberta dla wyrazów dodatnich

Niech $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$ będzie szeregiem o *wyrazach dodatnich*. Znajdź wyrażenie dla u_n oraz u_{n+1}, czyli wyraz n-ty i $(n+1)$-wszy oraz postać ułamka $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Określ granicę tego ułamka dla $n \to \infty$.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, szereg jest zbieżny.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, szereg jest rozbieżny.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, to szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny, a test nie daje nam definitywnej odpowiedzi.

Przepisz kryterium d'Alemberta do notatnika. Następnie przejdź do ramki nr 41.

41

Powtórzmy jeszcze raz.

Kryterium d'Alemberta dla wyrazów dodatnich:

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, to szereg jest *zbieżny.*

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, to szereg jest *rozbieżny.*

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, to wynik jest niejednoznaczny.

Rozważmy szereg $\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots$

Najpierw musimy zadecydować o wzorze wyrazów i zapisać n-ty wyraz. W tym przypadku będzie to $u_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$. Wyraz $(n+1)$-wszy wygląda tak samo, z tym że podstawiamy $(n+1)$ za n,

tzn. $u_{n+1}=\frac{2n+1}{2^n}$.

$$\therefore\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}$$

Teraz musimy znaleźć granicę ułamka dla $n\to\infty$. Z naszych wcześniejszych obliczeń granic wiemy, że kolejnym krokiem jest podzielenie licznika i mianownika przez ....

42

$\boxed{\text{Podzielenie licznika i mianownika przez } n}$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2+1/n}{2-1/n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+0}{2-0}=\frac{1}{2}.$

Ponieważ w tym przypadku $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, wiemy, że dany szereg jest *zbieżny*.

Wykonajmy jeszcze jeden przykład w taki sam sposób.

Zastosuj kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots$$

Po pierwsze, musimy znaleźć wyrażenie dla u_n.

Dla tego szeregu $u_n=$............

43

$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots\quad\boxed{u_n=\frac{n}{n+1}}$

u_{n+1} otrzymujemy przez proste zastąpienie n przez $(n+1)$.

$$\therefore\ u_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$$

Zatem $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}.$

Teraz musimy znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ i w tym celu musimy podzielić licznik i mianownik przez............

44

$\boxed{n^2}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n+1/n^2}{1+2/n}$$
$$=\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, co nie jest rozstrzygające i mówi nam zaledwie tyle, że szereg może być zbieżny lub rozbieżny. Co z tym teraz robimy?

Oczywiście zapomnieliśmy o teście 1, który mówił o tym, że:

(a) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, to szereg *może* być zbieżny,

(b) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, to szereg z pewnością jest *rozbieżny*.

W tym przypadku $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1$$

Nie jest to zero. Zatem szereg jest *rozbieżny*.

Teraz z całą pewnością możesz wykonać jeden przykład samodzielnie.

Sprawdź zbieżność szeregu $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{2^2}{7}+\dfrac{2^3}{8}+\dfrac{2^4}{9}+\dots$

Po skończeniu sprawdź wyniki w ramce nr 45.

45

Poniżej przedstawiamy szczegółowe rozwiązanie. Sprawdź, czy twoje jest z tym zgodne.

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2^2}{7}+\frac{2^3}{8}+\frac{2^4}{9}+\dots$$

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{4+n}; \quad u_{n+1} = \frac{2^n}{5+n}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{5+n}\cdot\frac{4+n}{2^{n-1}}$$

Potęga 2^{n-1} skraca się z potęgą 2^n, pozostawiając jedynie 2.

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(4+n)}{5+n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(4+n)}{5+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(4/n+1)}{5/n+1} = \frac{2(0+1)}{0+1} = 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$$

Jako że granica jest > 1, wiemy, że szereg jest . . . .

46

rozbieżny

Kolejna ramka.

47

Zbieżność bezwzględna

Do tej pory rozważaliśmy szeregi składające się wyłącznie z wyrazów dodatnich. Niektóre szeregi mogą mieć naprzemiennie wyrazy dodatnie i ujemne.

Na przykład szereg $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dots$ jest zbieżny,

podczas gdy szereg $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dots$ jest rozbieżny.

Jeśli u_n oznacza n-ty wyraz szeregu, to w ogólności może być on zarówno dodatni, jak i ujemny. Jednakże $|u_n|$ lub „mod $|u_n|$" oznacza wartość bezwzględną u_n, więc jeśli $u_1+u_2+u_3+u_4+\dots$ jest szeregiem wyrazów o mieszanych znakach, tzn. niektóre z nich są dodatnie, a niektóre ujemne, to szereg $|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+\dots$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich.

Zatem jeśli $\sum u_n = 1-3+5-7+9-\dots,$

to $\sum |u_n| = \dots\dots\dots\dots$

48

$$\boxed{\sum |u_n| = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots}$$

Uwaga: Jeżeli szereg $\sum u_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum |u_n|$ może nie być zbieżny, tak jak w przykładzie, który pokazaliśmy w poprzedniej ramce. Jeżeli jednak $\sum |u_n|$ jest zbieżny, to możemy być pewni, że $\sum u_n$ jest także zbieżny.

Jeżeli $\sum |u_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum u_n$ nazywamy bezwzględnie *zbieżnym*.

Jeżeli $\sum |u_n|$ nie jest zbieżny, lecz $\sum u_n$ jest zbieżny, to $\sum u_n$ nazywamy *szeregiem warunkowo zbieżnym*.

Zatem jeśli $\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ jest zbieżny,

a $\sum |u_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ jest rozbieżny,

to $\sum u_n$ .... jest zbieżny.

(bezwzględnie czy warunkowo?)

49

$$\boxed{\text{warunkowo}}$$

W ramach przykładu znajdź zbiór wartości x, dla których następujący szereg jest bezwzględnie zbieżny:

$$\frac{x}{2 \cdot 5} - \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 5^3} - \frac{x^4}{5 \cdot 5^4} + \frac{x^5}{6 \cdot 5^5} - \ldots$$

$$|u_n| = \left|\frac{x^n}{(n+1)5^n}\right|$$

$$|u_{n+1}| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}}\right|$$

$$\therefore \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)5^n}{x^n}\right|$$

$$= \left|\frac{x(n+1)}{5(n+2)}\right|$$

$$= \left|\frac{x(1+1/n)}{5(1+2/n)}\right|$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x}{5}\right|$$

Do bezwzględnej zbieżności potrzebujemy $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$.

$\therefore$ Szereg jest zbieżny dla $\left|\frac{x}{5}\right| < 1$, czyli dla $|x| < 5$.

Tym samym właśnie dotarliśmy do końca tego programu. Pozostaje Ci jeszcze lista kontrolna **Czy potrafisz?** i **Zadania sprawdzające**. Zanim do nich przejdziesz, spójrz jeszcze na podsumowanie tematów, które omówiliśmy. Przeczytaj je dokładnie, odświeży ci to pamięć.

Przejdź do ramki nr 50.

Podsumowanie

50

1 *Szereg arytmetyczny:* $a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots$

$$u_n = a + (n-1)d \qquad \sum_{r=0}^{n-1}(a + rd) = \frac{n}{2}(2a + [n-1]d)$$

2 *Szereg geometryczny:* $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$

$$u_n = ar^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Jeśli $|r| < 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$.

3 *Szeregi liczb naturalnych w ustalonej potędze*:

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

4 *Szereg nieskończony:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$

Jeśli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$ jest określoną liczbą, szereg jest zbieżny.

Jeśli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$ nie jest określoną liczbą, szereg jest rozbieżny.

5 *Testy zbieżności*:

(1) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, szereg może być zbieżny.
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ szereg z pewnością jest rozbieżny.

(2) *Kryterium porównawcze* – Przydatny szereg standardowy:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

Dla $p > 1$ szereg jest zbieżny, dla $p \leq 1$ szereg jest rozbieżny.

(3) *Kryterium d'Alemberta dla szeregu o wyrazach dodatnich*

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, szereg jest zbieżny.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, szereg jest rozbieżny.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, test nie jest rozstrzygający.

(4) *Dla szeregów ogólnych*

(a) Jeżeli $\sum |u_n|$ jest zbieżny, to $\sum u_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

(b) Jeżeli $\sum |u_n|$ jest rozbieżny, ale $\sum u_n$ jest zbieżny, to mówimy, że $\sum u_n$ jest warunkowo zbieżny.

Jesteś teraz gotowy na listę kontrolną **Czy potrafisz?** i **Zadania sprawdzające?**

Przejdź zatem do ramki nr 51.

Czy potrafisz?

51 **Lista kontrolna 11**

Zanim przejdziesz do testu końcowego, oceń w skali od 1 do 5

w jakim stopniu jesteś pewien, że potrafisz: Ramki

- wykonywać działania na szeregach arytmetycznych i geometrycznych, 1 do 14
  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nie
- wykonywać działania na szeregach liczb naturalnych w ustalonej potędze, 15 do 20
  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nie
- określać granice szeregów arytmetycznych i geometrycznych, 21 do 24
  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nie
- określać granice, kiedy mamy do czynienia z wyrażeniami nieoznaczonymi, 25 do 29
  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nie
- zastosować różne kryteria zbieżności do szeregów nieskończonych, 30 do 46
  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nie
- rozróżniać pomiędzy zbieżnością bezwzględną a warunkową. 47 do 49
  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nie

Zadania sprawdzające 11

52 Nie spiesz się i pracuj dokładnie.

PERSONAL TUTOR

1 Trzeci wyraz szeregu arytmetycznego to 34, a wyraz siedemnasty to –8. Znajdź sumę 20 początkowych wyrazów.

2 Dla szeregu 1 + 1,2 + 1,44 + … znajdź wyraz szósty i sumę dziesięciu początkowych wyrazów.

PERSONAL TUTOR

3 Znajdź sumę szeregu $\sum_{r=1}^{8} r(3+2r+r^2)$.

4 Ustal, który z poniższych szeregów jest zbieżny:

(a) $\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 6}+\dots$

(b) $\frac{2}{1^2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{2^4}{4^2}+\dots+\frac{2^n}{n^2}+\dots$

(c) $u_n=\frac{1+2n^2}{1+n^2}$

(d) $u_n=\frac{1}{n!}$

PERSONAL TUTOR

5 Znajdź zbiór wartości x, dla których każdy z poniższych szeregów jest zbieżny lub rozbieżny:

(a) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$

(b) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}\dots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3}x^n$

Dalsze wyzwania 11

1 Znajdź sumę n wyrazów szeregu
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2.$$

2 Znajdź sumę n wyrazów szeregu
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{5}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{7}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

3 Zsumuj n wyrazów szeregu
$$1\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 6 + 3\cdot 5\cdot 7 + \ldots$$

4 Znajdź sumę następujących szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+3)$ (b) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} (r+1)^3$

5 Znajdź sumę nieskończonej liczby wrazów szeregu
$$1 + \frac{4}{3!} + \frac{6}{4!} + \frac{8}{5!} + \ldots$$

6 Dla szeregu $5 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{5}{8} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}5}{2^{n-1}}$
znajdź wyrażenie na sumę początkowych n wyrazów. Jeśli szereg jest zbieżny, znajdź też jego sumę nieskończonej liczby wyrazów.

7 Znajdź granice:

(a) $\dfrac{3x^2 + 5x - 4}{5x^2 - x + 7}$ dla $x \to \infty$

(b) $\dfrac{x^2 + 5x - 4}{2x^2 - 3x + 1}$ dla $x \to \infty$

8 Dla każdego z poniższych szeregów oceń, czy jest on zbieżny, czy rozbieżny:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

9 Znajdź zbiór wartości x, dla których szereg
$$\frac{x}{27} + \frac{x^2}{125} + \ldots + \frac{x^n}{(2n+1)^3} + \ldots$$
jest bezwzględnie zbieżny.

10 Wykaż, że szereg
$$1 + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots$$
jest bezwzględnie zbieżny dla $-1 < x < +1$.

11 Określ zbiór wartości x, dla których zbieżny jest szereg
$$\frac{x}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^4}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

12 Znajdź zbiór wartości x, dla których zbieżny jest szereg
$$x + \frac{2^4x^2}{2!} + \frac{3^4x^3}{3!} + \frac{4^4x^4}{4!} + \ldots$$

13 Zbadaj zbieżność szeregu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x}{2\cdot 3}+\frac{x^2}{3\cdot 4}+\frac{x^3}{4\cdot 5}+\dots \text{ dla } x>0.$$

14 Wykaż, że następujący szereg jest zbieżny: $2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4^3}+\dots$

15 Udowodnij, że szereg

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots \text{ jest rozbieżny}$$

oraz że szereg

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots \text{ jest zbieżny.}$$

16 Określ, który z następujących szeregów jest zbieżny, a który rozbieżny:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3n^2}{1+n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3n^2-2}$

17 Wykaż, że szereg

$$1+\frac{2x}{5}+\frac{3x^2}{25}+\frac{4x^3}{125}+\dots \text{ jest zbieżny,}$$

jeśli $-5<x<5$, lecz nie dla innych wartości x.

18 Zbadaj zbieżność szeregów:

(a) $1+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{7}{4\cdot 9}+\frac{15}{8\cdot 16}+\frac{31}{16\cdot 25}+\dots$

(b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\dots$

19 Znajdź zbiór wartości x, dla których następujący szereg jest zbieżny:

$$\frac{x-2}{1}+\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(x-2)^3}{3}+\dots+\frac{(x-2)^n}{n}+\dots$$

20 Jeżeli $u_r=r(2r+1)+2^{r+1}$, znajdź wartość $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}u_r$.

54 Więcej ćwiczeń z tego tematu, stosowanych w nauce i inżynierii, znajdziesz na stronie internetowej tej książki dostępnej pod adresem www.palgrave.com/stroud [tylko w j. angielskim – przyp. tłumacza].