

K.A. Stroud
Dexter J. Booth

MATEMATYKA

OD ZERA DLA INŻYNIERA

Z języka angielskiego przełożyły

Agnieszka Apenuvor

Zofia Denkowska

Agnieszka Jarosz

WYDANIE POPRAWIONE

Korekta merytoryczna tłumaczenia

prof. dr hab. Tadeusz Stanisław

Pętla

Tytuł oryginału
Engineering Mathematics
Seventh Edition

First published in English by Palgrave Macmillan, a division of Macmillan Publishers Limited under the title Engineering Mathematics, 7th edition by K.A. Stroud and Dexter J. Booth. This edition has been translated and published under licence from Palgrave Macmillan. The authors have asserted their right to be identified as the author of this Work.

Copyright © K.A. Stroud 1970, 1982, 1987, 1995
Copyright © K.A. Stroud and Dexter J. Booth 2001, 2007 and 2013

Korekta merytoryczna tłumaczenia **prof. dr hab. Tadeusz Stanisz**
Redakcja **Agnieszka Jarosz**
Tłumaczenie **Agnieszka Apenuvor, Zofia Denkowska, Agnieszka Jarosz**
Skład, łamanie, projekt graficzny okładki i stron tytułowych **Daniel Zarymbki**

Copyright © 2016 for the translation by Pętla Sp. z o.o.
Copyright © 2016 for the Polish edition by Pętla Sp. z o.o.

Wszystkie prawa zastrzeżone. Przedruk lub kopiowanie całości albo fragmentów tej książki - z wyjątkiem cytatów w artykułach i przeglądach krytycznych - możliwe jest tylko na podstawie pisemnej zgody wydawcy.

ISBN 978-83-944283-0-3

Pętla Sp. z o.o.
ul. Biwakowa 4, 02-965 Warszawa
www.facebook.com/matematykastroud/
tel. 517 187 464



Skrócony spis treści

Część I Tematy podstawowe

F.1	Arytmetyka	3
F.2	Wprowadzenie do algebry	63
F.3	Wyrażenia i równania	101
F.4	Wykresy	127
F.5	Równania liniowe	161
F.6	Równania wielomianowe	177
F.7	Dwumiany (dwumian Newtona)	195
F.8	Ułamki proste	223
F.9	Trygonometria	243
F.10	Funkcje	267
F.11	Funkcje trygonometryczne i wykładnicze	287
F.12	Różniczkowanie	315
F.13	Całkowanie	353

Część II

1	Liczby zespolone 1	385
2	Liczby zespolone 2	412
3	Funkcje hiperboliczne	437
4	Wyznaczniki	459
5	Macierze	489
6	Wektory	519
7	Różniczkowanie	544
8	Zastosowania różniczkowania	562
9	Styczne, normalne i krzywizny	583
10	Ciągi	605
11	Szeregi 1	639
12	Szeregi 2	663
13	Krzywe i dopasowanie krzywej	688
14	Pochodne cząstkowe 1	731
15	Pochodne cząstkowe 2	752
16	Całkowanie 1	768
17	Całkowanie 2	794
18	Całkowanie z użyciem wzorów rekurencyjnych	821
19	Zastosowania całkowania 1	834
20	Zastosowania całkowania 2	851
21	Zastosowania całkowania 3	873
22	Całkowanie numeryczne	902
23	Układ współrzędnych biegunowych	921
24	Całki wielokrotne	943
25	Równania różniczkowe pierwszego rzędu	968
26	Równania różniczkowe drugiego rzędu	1004
27	Wprowadzenie do transformat Laplace'a	1027
28	Przetwarzanie danych i statystyka	1045
29	Prawdopodobieństwo	1076

Strona celowo pozostawiona pusta

Spis treści

<i>Przedmowa do pierwszego wydania</i>	<i>xviii</i>
<i>Przedmowa do drugiego wydania</i>	<i>xix</i>
<i>Przedmowa do trzeciego wydania</i>	<i>xx</i>
<i>Przedmowa do czwartego wydania</i>	<i>xxi</i>
<i>Przedmowa do siódmego wydania</i>	<i>xxii</i>
<i>Od wydawcy polskiej edycji</i>	<i>xxiii</i>
<i>Jak korzystać z tej książki</i>	<i>xxiv</i>
<i>Przydatne informacje</i>	<i>xxvi</i>

Część I Tematy podstawowe **1**

Program F.1 Arytmetyka **3**

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	3
<i>Quiz F.1</i>	4
Typy liczb	6
Liczby naturalne - Cyfry i pozycyjność - Punkty na osi i porządek - Liczby całkowite - Nawiasy - Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie i dzielenie - Nawiasy i kolejność wykonywania działań - Podstawowe prawa arytmetyki - Szacowanie - Zaokrąglanie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Czynniki, dzielniki i liczby pierwsze	15
Czynniki i dzielniki - Liczby pierwsze - Rozkład na czynniki pierwsze - Podstawowe twierdzenie arytmetyki - Największy wspólny dzielnik (NWD) - Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Ułamki, stosunki i procenty	18
Dzielenie liczb całkowitych - Mnożenie ułamków - Z - Równość ułamków - Dzielenie ułamków - Dodawanie i odejmowanie ułamków - Ułamki na kalkulatorze - Stosunki - Procenty - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Ułamki dziesiętne	27
Dzielenie liczb całkowitych - Zaokrąglanie - Cyfry znaczące - Miejsca po przecinku - Zera końcowe - Ułamki zwykłe w postaci dziesiętnej - Ułamki dziesiętne nieskończone - Ułamki w postaci dziesiętnej jako ułamki zwykłe - Ułamki dziesiętne nieskończone jako ułamki zwykłe - Liczby wymierne, niewymierne i rzeczywiste - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Potęgi	33
Podnoszenie liczby do potęgi - Prawa potęgowania - Potęgowanie na kalkulatorze - Potęgi o wykładniku ułamkowym i pierwiastki - Liczby niewymierne - Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych przez potęgi 10 - Kolejność wykonywania działań - Postać wykładnicza - Wyprowadzanie postaci wykładniczej - Użycie kalkulatora - Postać inżynierska - Sprawdzanie obliczeń - Dokładność - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Systemy liczbowe	44
System dziesiętny - System binarny (dwójkowy) - System ósemkowy - System dwunastkowy - System szesnastkowy - Metoda alternatywna - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Zamiana podstawy z dziesiętnej na inną	52
Postać dwójkowa - Postać ósemkowa - Postać dwunastkowa - Zamiana ułamka w systemie dziesiętnym na postać ósemkową - Użycie liczb w systemie ósemkowym jako etapu pośredniego	
Metoda odwrotna	56
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	

<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.1</i>	58
<i>Zadania sprawdzające F.1</i>	59
<i>Dalsze wyzwania F.1</i>	60
Program F.2 Wprowadzenie do algebry	63
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	63
<i>Quiz F.2</i>	64
Wyrażenia algebraiczne	65
Symbole inne niż cyfry - Stałe - Zmienne - Reguły algebry - Kolejność wykonywania działań - Wyrazy i współczynniki - Redukcja wyrazów podobnych - Wyrazy analogiczne - Rozszerzanie nawiasów - Nawiasy zagnieżdżone - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Potęgi i logarytmy	72
Potęgi - Reguły dotyczące potęg - Logarytmy - Reguły dotyczące logarytmów - Podstawa 10 i podstawa e - Zamiana podstawy - Równania logarytmiczne - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Mnożenie i dzielenie algebraiczne	81
Mnożenie - Dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Ułamki algebraiczne	85
Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie i dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Rozkład wyrażeń algebraicznych na czynniki	88
Wspólne czynniki - Wspólne czynniki uzyskane przez grupowanie - Wzory skróconego mnożenia - Wyrażenia kwadratowe będące iloczynem czynników liniowych - Rozkład na czynniki wyrażeń kwadratowych - Test dla czynników liniowych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.2</i>	98
<i>Zadania sprawdzające F.2</i>	98
<i>Dalsze wyzwania F.2</i>	99
Program F.3 Wyrażenia i równania	101
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	101
<i>Quiz F.3</i>	102
Wyrażenia i równania	103
Obliczanie wartości wyrażeń - Równania - Obliczanie wartości zmiennych niezależnych - Przekształcanie wzorów - Proces obliczania wartości - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Wielomiany	113
Wyrażenia wielomianowe - Obliczanie wartości wielomianów - Obliczanie wartości wielomianów metodą Hornera - Twierdzenie o resztach (twierdzenie Bézouta) - Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki - Rozkład na czynniki wielomianów czwartego stopnia - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.3</i>	124
<i>Zadania sprawdzające F.3</i>	124
<i>Dalsze wyzwania F.3</i>	125
Program F.4 Wykresy	127
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	127
<i>Quiz F.4</i>	128
Wykresy równań	129
Równania - Uporządkowane pary liczb - Kartezjański układ współrzędnych - Rysowanie wykresów - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	

Stosowanie arkuszy kalkulacyjnych	137
Arkusze kalkulacyjne - Wiersze i kolumny - Wpisywanie tekstu i liczb - Formuły - Usuwanie wpisów - Sporządzanie wykresów w kartezjańskim układzie współrzędnych - Sposoby prezentacji - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Nierówności	147
Większe niż i mniejsze niż - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Wartości bezwzględne	148
Moduł - Wykresy - Nierówności - Interakcja - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.4</i>	157
<i>Zadania sprawdzające F.4</i>	158
<i>Dalsze wyzwania F.4</i>	158
Program F.5 Równania liniowe	161
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	161
<i>Quiz F.5</i>	162
Równania liniowe	163
Rozwiązywanie równań prostych - Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi - Układy trzech równań z trzema niewiadomymi - Wstępne przekształcanie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.5</i>	173
<i>Zadania sprawdzające F.5</i>	174
<i>Dalsze wyzwania F.5</i>	174
Program F.6 Równania wielomianowe	177
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	177
<i>Quiz F.6</i>	178
Równania wielomianowe	179
Równania kwadratowe - Równania trzeciego stopnia z przynajmniej jednym czynnikiem liniowym - Równania czwartego stopnia z co najmniej dwoma czynnikiem liniowymi - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.6</i>	193
<i>Zadania sprawdzające F.6</i>	193
<i>Dalsze wyzwania F.6</i>	193
Program F.7 Dwumiany (dwumian Newtona)	195
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	195
<i>Quiz F.7</i>	196
Silnia i kombinacje	197
Silnia - Kombinacje - Trzy własności współczynników dwumianowych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Wzór na dwumian Newtona	205
Trójkąt Pascala - Dwumian Newtona - Ogólny składnik rozwinięcia wielomianowego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Zapis przy użyciu znaku Σ (sigma)	211
Składniki ogólne sumy w zapisie ze znakiem Σ - Suma n początkowych liczb naturalnych - Reguły działania na sumach - Liczba e - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.7</i>	220
<i>Zadania sprawdzające F.7</i>	220
<i>Dalsze wyzwania F.7</i>	221

Program F.8 Ułamki proste	223
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	223
<i>Quiz F.8</i>	224
Ułamki proste	225
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Mianowniki z powtarzającymi się i kwadratowymi czynnikami	232
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.8</i>	239
<i>Zadania sprawdzające F.8</i>	240
<i>Dalsze wyzwania F.8</i>	240
Program F.9 Trygonometria	243
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	243
<i>Quiz F.9</i>	244
Kąty	245
Obrót - Radiany - Trójkąty - Funkcje trygonometryczne - Odwrotności funk- cji trygonometrycznych - Twierdzenie Pitagorasa - Trójkąty specjalne - Po- łowa trójkąta równobocznego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Tożsamości trygonometryczne	258
Jedynka trygonometryczna - Dodatkowe dwie tożsamości - Tożsamości dla kątown złożonych - Wzory trygonometryczne - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.9</i>	264
<i>Zadania sprawdzające F.9</i>	264
<i>Dalsze wyzwania F.9</i>	265
Program F.10 Funkcje	267
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	267
<i>Quiz F.10</i>	268
Przetwarzanie liczb	269
Funkcje jako reguły, lecz nie wszystkie reguły jako funkcje - Funkcje i dzia- łania arytmetyczne - Funkcje odwrotne - Wykresy funkcji odwrotnych - Wykres funkcji $y = x^3$ - Wykres funkcji $y = x^{1/3}$ - Wykres funkcji $y = x^3$ i $y = x^{1/3}$ w jednym układzie współrzędnych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Złożenie	280
Funkcja złożona - Funkcje odwrotne do funkcji złożonych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.10</i>	284
<i>Zadania sprawdzające F.10</i>	285
<i>Dalsze wyzwania F.10</i>	285
Program F.11 Funkcje trygonometryczne i wykładnicze	287
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	287
<i>Quiz F.11</i>	288
Funkcje trygonometryczne	289
Obrót - Tangens - Okres - Amplituda - Przesunięcie fazowe - Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych - Równania trygonometryczne - Równa- nia w postaci $a \cos x + b \sin x = c$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	303
Funkcje wykładnicze - Równania wykładnicze - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	

Funkcje parzyste i nieparzyste	307
Części parzyste i nieparzyste - Część parzysta i nieparzysta funkcji wykładniczej - Granice funkcji - Działania na granicach - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.11</i>	312
<i>Zadania sprawdzające F.11</i>	313
<i>Dalsze wyzwania F.11</i>	314

Program F.12 Różniczkowanie 315

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	315
<i>Quiz F.12</i>	316
Współczynniki kierunkowe i gradienty	317
Współczynnik kierunkowy prostej - Gradient krzywej w danym punkcie - Określenie gradientu krzywej metodami algebraicznymi - Pochodne potęg x - Różniczkowanie wielomianów - Pochodne drugiego i wyższego rzędu - zapis alternatywny - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Standardowe pochodne i reguły	330
Granica $\sin\theta/\theta$ dla $\theta \rightarrow 0$ - Standardowe pochodne - Pochodna iloczynu funkcji - Pochodna ilorazu dwóch funkcji - Pochodna funkcji złożonej - Pochodna $y = a^x$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Metoda iteracyjna Newtona	344
Zapis - Tabelaryczne przedstawienie wyników - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.12</i>	350
<i>Zadania sprawdzające F.12</i>	351
<i>Dalsze wyzwania F.12</i>	352

Program F.13 Całkowanie 353

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	353
<i>Quiz F.13</i>	354
Całkowanie	355
Stała całkowania - Całki standardowe - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Całkowanie wielomianów	358
Funkcje funkcji liniowej x - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Całkowanie funkcji wymiernej z użyciem rozkładu na ułamki proste	363
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Pola obszarów pod krzywymi	366
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Całkowanie jako sumowanie	370
Pole figury ograniczonej krzywą i przecinającą ją prostą - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.13</i>	379
<i>Zadania sprawdzające F.13</i>	380
<i>Dalsze wyzwania F.13</i>	381

Część II 383

Program 1 Liczby zespolone 1 385

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	385
Wprowadzenie	386
Pojęcia i symbole	
Symbol i	386
Równania kwadratowe	

Potęgi i	389
Potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim - Potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym	
Liczby zespolone	390
Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie - Dzielenie - Równość liczb - Ćwiczenia na powtórzenie	
Przedstawienie graficzne liczb zespolonych	399
Diagram Arganda - Interpretacja geometryczna sumy liczb zespolonych	
Postać trygonometryczna liczb zespolonych	401
Postać wykładnicza liczb zespolonych	406
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 1</i>	409
<i>Zadania sprawdzające 1</i>	409
<i>Dalsze wyzwania 1</i>	410
Program 2 Liczby zespolone 2	412
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	412
Obliczenia dla postaci trygonometrycznej	413
Ćwiczenia na powtórzenie	
Pierwiastki liczby zespolonej	421
Rozwinięcia	427
Rozwinięcia $\sin n\theta$ i $\cos n\theta$ - Rozwinięcia $\cos^n\theta$ i $\sin^n\theta$	
Miejsca geometryczne	430
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 2</i>	434
<i>Zadania sprawdzające 2</i>	434
<i>Dalsze wyzwania 2</i>	435
Program 3 Funkcje hiperboliczne	437
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	437
Wprowadzenie	438
Wykresy funkcji hiperbolicznych	440
Ćwiczenia na powtórzenie	
Obliczanie funkcji hiperbolicznych	445
Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych	446
Postać logarytmiczna funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych	448
Tożsamości hiperboliczne	451
Zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi	453
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 3</i>	456
<i>Zadania sprawdzające 3</i>	457
<i>Dalsze wyzwania 3</i>	457
Program 4 Wyznaczniki	459
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	459
Wyznaczniki	460
Wyznaczniki trzeciego stopnia	466
Obliczanie wyznaczników trzeciego stopnia	
Układy równań liniowych z trzema niewiadomymi	470
Ćwiczenia na powtórzenie	
Zgodność układu równań	478
Własności wyznaczników	481
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 4</i>	485

Równania parametryczne	557
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 7</i>	559
<i>Zadania sprawdzające 7</i>	560
<i>Dalsze wyzwania 7</i>	560
Program 8 Zastosowania różniczkowania	562
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	562
Różniczkowanie funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych	563
Ćwiczenia na powtórzenie	
Pochodne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych	565
Ćwiczenia na powtórzenie	
Wartości minimum i maksimum	570
Punkty przegięcia	574
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 8</i>	580
<i>Zadania sprawdzające 8</i>	580
<i>Dalsze wyzwania 8</i>	580
Program 9 Styczne, normalne i krzywizny	583
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	583
Równanie prostej	584
Styczne i normalne do krzywej w danym punkcie	587
Krzywizna	592
Środek krzywizny	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 9</i>	601
<i>Zadania sprawdzające 9</i>	602
<i>Dalsze wyzwania 9</i>	602
Program 10 Ciągi	605
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	605
Funkcje określone dla liczb całkowitych	606
Ciągi - Wykresy ciągów - Ciąg arytmetyczny - Ciąg geometryczny - Ciąg harmoniczny - Określenie rekurencyjne - Inne ciągi - Podsumowanie -	
Ćwiczenia na powtórzenie	
Równania różnicowe	618
Rozwiązywanie równań różnicowych - Równania jednorodnego drugiego rzędu - Równe pierwiastki równania charakterystycznego - Podsumowanie -	
Ćwiczenia na powtórzenie	
Granice ciągów	626
Nieskończoność - Granice - Granice nieskończone - Reguły dotyczące granic - Symbole nieoznaczone (granice nieokreślone) - Podsumowanie -	
Ćwiczenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 10</i>	635
<i>Zadania sprawdzające 10</i>	636
<i>Dalsze wyzwania 10</i>	637
Program 11 Szeregi 1	639
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	639
Szeregi	640
Szeregi arytmetyczne - Średnia arytmetyczna - Szeregi geometryczne - Średnia geometryczna	
Szeregi liczb naturalnych w ustalonej potęgde	645
Suma liczb naturalnych - Suma kwadratów - Suma sześciąt	

Szeregi nieskończone	648
Granice	650
Szeregi zbieżne i rozbieżne - Testy zbieżności - Zbieżność bezwzględna - Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 11</i>	660
<i>Zadania sprawdzające 11</i>	660
<i>Dalsze wyzwania 11</i>	661

Program 12 Szeregi 2 663

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	663
Szeregi potęgowe	664
Wprowadzenie - Szereg Maclaurina - Szeregi standardowe - Szeregi dwumianowe	
Wartości przybliżone	674
Szereg Taylora	
Granice funkcji – symbole nieoznaczone	677
Reguła de l'Hospitala do wyznaczania granic wyrażeń nieoznaczonych	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 12</i>	684
<i>Zadania sprawdzające 12</i>	685
<i>Dalsze wyzwania 12</i>	685

Program 13 Krzywe i dopasowanie krzywej 688

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	688
Wprowadzenie	689
Standardowe krzywe	689
Linia prosta - Krzywe drugiego stopnia - Krzywe trzeciego stopnia - Okrąg - Elipsa - Hiperbola - Krzywe logarytmiczne - Krzywe wykładnicze - Krzywe hiperboliczne - Krzywe trygonometryczne	
Asymptoty	697
Określenie asymptoty ukośnej - Asymptoty równoległe do osi x i y	
Systematyczne rysowanie wykresów krzywych na podstawie równania	702
Symetria - Punkty przecięcia z osiami - Przesunięcie względem początku układu współrzędnych - Asymptoty - Duże i małe wartości x i y - Punkty stacjonarne - Ograniczenia	
Dopasowywanie krzywej	707
Zależność liniowa - Wykresy w postaci $y = ax^n$, gdzie a i n są stałymi - Wy- kresy w postaci $y = ae^{mx}$	
Metoda najmniejszych kwadratów	712
Dopasowywanie linii prostej	
Korelacja	718
Korelacja - Miary korelacji - Współczynnik korelacji iloczynu momentów Pe- arsona - Współczynnik korelacji rang Spearmana - Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 13</i>	726
<i>Zadania sprawdzające 13</i>	727
<i>Dalsze wyzwania 13</i>	728

Program 14 Pochodne cząstkowe 1 731

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	731
Pochodne cząstkowe	732
Ćwiczenia na powtórzenie	
Małe przyrosty	744
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 14</i>	749
<i>Zadania sprawdzające 14</i>	749

<i>Dalsze wyzwania 14</i>	750
Program 15 Pochodne cząstkowe 2	752
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	752
Pochodne cząstkowe	753
Prędkość zmiany	755
Zmiana zmiennych	763
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 15</i>	765
<i>Zadania sprawdzające 15</i>	765
<i>Dalsze wyzwania 15</i>	766
Program 16 Całkowanie 1	768
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	768
Wprowadzenie	769
Całki standardowe	
Funkcje liniowej funkcji x	772
Całki w postaci $f'(x)/f(x)dx$ oraz $f(x) \cdot f'(x)dx$	774
Całkowanie iloczynów – całkowanie przez części	778
Całkowanie z wykorzystaniem rozkładu na ułamki proste	782
Całkowanie funkcji trygonometrycznych	787
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 16</i>	791
<i>Zadania sprawdzające 16</i>	792
<i>Dalsze wyzwania 16</i>	792
Program 17 Całkowanie 2	794
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	794
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 17</i>	819
<i>Zadania sprawdzające 17</i>	819
<i>Dalsze wyzwania 17</i>	820
Program 18 Całkowanie z użyciem wzorów rekurencyjnych	821
<i>Czego się nauczę z tego rozdziału?</i>	821
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 18</i>	831
<i>Zadania sprawdzające 18</i>	831
<i>Dalsze wyzwania 18</i>	832
Program 19 Zastosowania całkowania 1	834
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	834
Podstawowe zastosowania	835
Obszar pod krzywą - Całki oznaczone	
Równania parametryczne	843
Wartości średnie	844
Wartość średniej kwadratowej (RMS)	846
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 19</i>	849
<i>Zadania sprawdzające 19</i>	849
<i>Dalsze wyzwania 19</i>	849
Program 20 Zastosowania całkowania 2	851
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	851
Wprowadzenie	852

Objętość bryły obrotowej	852
Środek geometryczny figury płaskiej	856
Środek ciężkości bryły obrotowej	859
Długość krzywej	860
Równania parametryczne	
Powierzchnia bryły obrotowej	864
Równania parametryczne	
Reguła Pappusa-Guldina	867
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 20</i>	869
<i>Zadania sprawdzające 20</i>	870
<i>Dalsze wyzwania 20</i>	870

Program 21 Zastosowania całkowania 3 873

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	873
Momenty bezwładności	874
Promień bezwładności - Twierdzenie o osiach równoległych - Twierdzenie o osiach prostopadłych (dla cienkich płytek) - Przydatne wyniki standardowe	
Geometryczny moment bezwładności	888
Figury złożone	
Środek parcia	892
Ciśnienie w punkcie P o głębokości z poniżej lustra płynu - Całkowite parcie na pionową płytkę zanurzoną w płynie - Głębokość środka parcia - Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 21</i>	899
<i>Zadania sprawdzające 21</i>	899
<i>Dalsze wyzwania 21</i>	900

Program 22 Całkowanie numeryczne 902

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	902
Wprowadzenie	903
Całkowanie numeryczne	904
Za pomocą szeregów - Z użyciem metody Simpsona	
Dowód metody Simpsona	916
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 22</i>	918
<i>Zadania sprawdzające 22</i>	918
<i>Dalsze wyzwania 22</i>	919

Program 23 Układ współrzędnych biegunowych 921

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	921
Wprowadzenie do współrzędnych biegunowych	922
Krzywe biegunowe	924
Standardowe krzywe biegunowe	926
Zastosowania	929
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 23</i>	941
<i>Zadania sprawdzające 23</i>	941
<i>Dalsze wyzwania 23</i>	942

Program 24 Całki wielokrotne 943

<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	943
Sumowanie w dwóch kierunkach	944
Całki podwójne	947
Całki potrójne	949

Zastosowania	951
Ćwiczenia na powtórzenie	
Zapis alternatywny	956
Obliczenia pól powierzchni z użyciem całek wielokrotnych	960
Obliczanie objętości z użyciem całek wielokrotnych	962
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 24</i>	965
<i>Zadania sprawdzające 24</i>	965
<i>Dalsze wyzwania 24</i>	966
Program 25 Równania różniczkowe pierwszego rzędu	968
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	968
Wprowadzenie	969
Tworzenie równań różniczkowych	970
Rozwiązywanie równań różniczkowych	970
Za pomocą bezpośredniego całkowania - Przez rozdzielenie zmiennych	
- Ćwiczenia na powtórzenie	
Rozwiązywanie równań różniczkowych	979
Równania jednorodne – przez podstawienie $y = vx$ -	
Ćwiczenia na powtórzenie	
Rozwiązywanie równań różniczkowych	985
Równania liniowe – użycie czynnika całkującego - Ćwiczenia na powtórzenie	
Równanie Bernoulliego	993
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 25</i>	999
<i>Ćwiczenia testowe 25</i>	1000
<i>Dalsze wyzwania 25</i>	1000
Program 26 Równania różniczkowe drugiego rzędu	1004
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	1004
Równania jednorodne	1005
Ćwiczenia na powtórzenie	
Równania niejednorodne	1013
Rozwiązanie szczególne	1020
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 26</i>	1024
<i>Zadania sprawdzające 26</i>	1025
<i>Dalsze wyzwania 26</i>	1025
Program 27 Wprowadzenie do transformat Laplace'a	1027
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	1027
Transformata Laplace'a	1028
Odwrotna transformata Laplace'a - Tabela transformat Laplace'a -	
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Transformata Laplace'a	1032
Transformata Laplace'a pochodnej - Dwie właściwości transformat Laplace'a	
- Tabela transformat Laplace'a	
Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie	
Transformata Laplace'a	1036
Generowanie nowych transformat - Transformaty Laplace'a pochodnych	
wyższych rzędów - Tabela transformat Laplace'a - Równania różniczkowe	
niejednorodne, liniowe, o stałych współczynnikach - Podsumowanie - Ćwi-	
czenia na powtórzenie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 27</i>	1043
<i>Zadania sprawdzające 27</i>	1043

<i>Dalsze wyzwania 27</i>	1044
Program 28 Przetwarzanie danych i statystyka	1045
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	1045
Wprowadzenie	1046
Uporządkowywanie danych	1046
Tabela zliczania metodą kreskową - Dane grupowane - Grupowanie danych ciągłych - Częstość względna - Zaokrąglanie danych - Granice klas	
Histogramy	1053
Histogram częstości - Histogram częstości względnej	
Miary tendencji centralnej	1055
Średnia - Kodowanie przy obliczaniu średniej - Dekodowanie - Kodowanie w zgrupowanych rozkładach częstości - Moda - Moda w danych zgrupowanych - Mediana - Mediana z pogrupowanych danych	
Miary rozproszenia	1063
Średnie odchylenie - Rozstęp - Odchylenie standardowe - Alternatywny wzór na odchylenie standardowe	
Krzywe rozkładu	1066
Wielokąty częstości - Krzywe częstości - Krzywa rozkładu normalnego	
Standaryzowana krzywa normalna	1069
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 28</i>	1072
<i>Zadania sprawdzające 28</i>	1072
<i>Dalsze wyzwania 28</i>	1073
Program 29 Prawdopodobieństwo	1076
<i>Czego się nauczę z tego programu?</i>	1076
Prawdopodobieństwo	1077
Doświadczenia losowe - Zdarzenia - Seria doświadczeń losowych - Łączenie zdarzeń	
Zdarzenia i prawdopodobieństwa	1079
Prawdopodobieństwo - Przypisywanie prawdopodobieństw - Podsumowanie	
Prawdopodobieństwa zdarzeń łączonych	1082
Zdarzenia niewykluczające się wzajemnie - Zdarzenia zależne - Zdarzenia niezależne - Drzewka prawdopodobieństwa - Podsumowanie	
Prawdopodobieństwo warunkowe	1087
Rozkłady prawdopodobieństwa	1090
Zmienne losowe - Wartości oczekiwane - Wariancja i odchylenie standardowe - Próby Bernoulliego - Rozkład dwumianowy prawdopodobieństwa - Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe - Rozkład prawdopodobieństwa Poissona - Porównanie rozkładu dwumianowego i Poissona	
Ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa	1106
Krzywa rozkładu normalnego (lub krzywa normalna)	
Standardowa krzywa normalna	1106
Podsumowanie	
<i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 29</i>	1112
<i>Zadania sprawdzające 29</i>	1113
<i>Dalsze wyzwania 29</i>	1113
<i>Odpowiedzi</i>	1117
<i>Indeks</i>	1145